ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Аль - Кхазраджи Сундус Хатем Маджид

О компьютерном моделировании некоторых задач фильтрации в пористой среде

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:

доктор физико–математических наук,

профессор Костин В.А.

В О Р О Н Е Ж — 2015

Оглавление

Введение 4

1 Корректно поставленные задачи 17

1.1 Вектор-функции и оператор-функции 17

1.2 Сильно непрерывные полугруппы 23

1.3 Корректная разрешимость задачи Коши для уравнения 1–го порядка 33

1.4 Дробные степени операторов 36

1.5 Корректная разрешимость граничных задач для уравнения 2–го порядка 38

1.6 Об одном методе решения одномерных параболических уравнений (задачи Дирихле) 46

2 О корректной разрешимости задач фильтрации 50

2.1 Необходимые факты из общей теории при исследовании модели В.С.Голубева 50

2.2 Постановка задач в рамках общей теории (случай $x \in R^+$) 53

2.3 Построение полугруппы $U(t, -A)$ (случай $x \in (0, \infty)$) . . . 54

2.4 Построение оператора $\sqrt{A}$ 58

2.5 Вычисление характеристик потока на границе 60

3 Об автоматическом регулировании течения вязкой сжи-

маемой жидкости в пористой среде **64**

3.1 Выбор математической модели 64

3.2 Анализ возможности использования неявной разностной схемы 66

3.3 Численное решение граничной задачи 67

3.4 Результаты расчетов и рекомендации 69

Список литературы 71

Приложение 80

Введение

В настоящее время все более актуальными становятся методы дробного интегро-дифференцирования при исследовании математических моделей, описывающих процессы протекающие во фрактальных средах. И здесь, при численной реализации решений соответствующих задач, основополагающим фактом является установление их корректной разрешимости, обеспечивающей устойчивую стабильность сходимости приближенных решений к точному.

В частности, сюда относятся некоторые теории, описывающие движения жидкости в пористой среде. Так, описывая фильтрационные потоки, В.С.Голубев в [12] показывает, что существует структура потока, зависящая от расхода жидкостей, которая при малом расходе имея ламинарный поток охватывает всю элементарную камеру (см. рис. 1а), а с увеличением расхода структура потока приобретает двойственный характер. В то время как в ядре потока (проточной зоне) жидкость движется от входа к выходу по прямолинейным траекториям, на периферии потока (в застойной зоне) она вовлекается в вихревое движение (рис. 1б). Такой не ламинарный (но и не турублентный) режим характерен для течения жидкости в пористой среде.

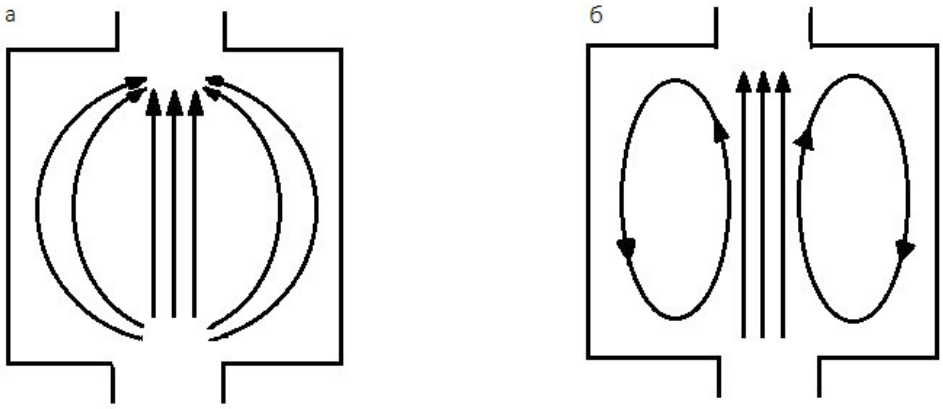

Рис. 1. Схематическое изображение траекторий частиц жидкости в областях ламинарного (а) и вихревого (б) массообмена между проточными и застойными зонами камеры.

Феноменологическое уравнение движения жидкости на основе модели пористой среды, состоящей из проточных и застойных зон было предложено С.В.Голубевым и имеет вид

$$a\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)p(t,x) -$$

$$-(1-\nu)\gamma^2\int_0^t e^{\gamma(s-t)}p(s,x)ds = \mathrm{L}_t p(t,x). \qquad (1)$$

Различные задачи для такого уравнения изучались многими авторами (см. например Бабенко [1,2]).

Однако, как правило, проводимые при этом исследования касаются только вопросов существования решений соответствующих задач и их интегро-дифференциальных представлений. Вопросы же корректной разрешимости и следующей из этого устойчивости решений по исходным данным, в этих работах не обсуждаются. В тоже время такие исследования важны при численной реализации задач с применением высококомпьютерных технологий.

Как известно, согласно Ж.Адамару, задача определения решения $u \in U$ уравнения $Au = f$, $(f \in F)$ корректно поставлена на паре (U, F) метрических пространств U и F с метриками ρ_U и ρ_F соответственно, если выполнены условия:

а) для всякого $f \in F$ существует $u \in U$— решение уравнения, б) решение определяется однозначно, в) задача устойчива на пространствах (F, U), то есть для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое что из неравенства $\rho_F(f_1, f_2) < \delta$, следует $\rho_U(u_1, u_2) < \varepsilon$.

Однако устойчивость задачи зависит от выбранных топологий в F и U и, вообще говоря, подходящим выбором топологий формально можно добиться непрерывности оператора A^{-1}, существование которого обеспечивают условия а) и б). Так, в случае линейного взаимнооднозначного соответствия оператора A и нормированных пространств U и F, устойчивость будет иметь место, если пространство F наделить нормой $\|f\|_F = \|A^{-1}f\| = \|u\|_U$, и тогда $\|A^{-1}f\| = \sup_{f\neq 0}\frac{\|A^{-1}f\|}{\|f\|} = 1$ (см. [31], с.12).

В [1] при исследовании процессов фильтрации в пористой среде для $x \in (0,\infty)$ и $t \in (0,\infty)$ рассматривается задача отыскания давления $p(t,x)$, удовлетворяющее уравнению (1) и начально-краевым условиям

$$p(0,x) = 0, \tag{2}$$

$$p(t,0) = q(t), \lim_{x\to\infty} p(t,x) = 0. \tag{3}$$

Здесь ν-доля объема проточных зон, γ-константа массообмена между проточными и застойными зонами, a- коэффициент пьезопроводимости.

Требуется найти градиент давления у границы области.

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}|_{x=0} = \varphi(t). \tag{4}$$

В [1] ответ дается в виде

$$\varphi(t) = \mathrm{L}_{\mathrm{t}}^{\frac{1}{2}} q(t) = \sqrt{\frac{a}{\nu}} e^{-\gamma t} M e^{\gamma t}, \tag{5}$$

где неограниченный оператор M формально выписывается в виде ряда

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{D}^{\frac{1}{2}-n}, \tag{6}$$

где $a_0 = 1, a_1 = \gamma(\beta-1), a_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} a_{m-k}a_k, (k \geq 3)$, сходимость которого в [1] не обсуждается.

Тем самым по существу не обсуждается вопрос о сходимости приближенных решений к точному и их устойчивости к погрешностям исходных данных.

В [1] приводится и другой метод решения этой задачи. Используя преобразование Лапласа, можно найти выражение для градиента у границы в виде

$$-\frac{\partial P_1}{\partial \xi}|_{\xi=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{d\tau}\int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau-u}}(\frac{d}{du}\int_0^u \{\exp[-(1+\frac{\beta}{2})(u-z)]I_0[\frac{\beta}{2}(u-z)]+$$

$$+(1+\beta)\int_0^{u-z}\exp[-(1+\frac{\beta}{2})\upsilon]I_0(\frac{\beta}{2}\upsilon)d\upsilon\}P_s(z)dz)du,$$

$$\xi = x\sqrt{\upsilon\gamma/a}, \qquad \tau = t\gamma, \qquad \beta = (1-\upsilon)/\upsilon$$

где I_0-функция Бесселя мнимого аргумента. Эта формула неудобна для анализа и численных расчетов, так как в нее дважды входит операция дифференцирования и трижды – неопределенный интеграл.

Предлагаемый в настоящей работе метод и алгоритм численной реализации решения как задачи (1)-(3) так и вычисления функции $\varphi(t)$ в (4) позволяет устранить указанные недостатки. Здесь мы используем довольно общий метод С.Г.Крейна решения краевых задач для уравнений эллиптического типа в банаховом пространстве ([27] с.322). Аналогичные исследования с применением теории полугрупп проводились в [3],[40].

В настоящей диссертации проведён анализ математической модели изменения давления вязкой сжимаемой жидкости, движущейся в пористой жидкость-проводящей магистрали для обоснования рекомендаций: о местах размещения датчиков давления жидкости вдоль магистрали и о структуре измеряемых данных.

Предполагается, что управление течением жидкости осуществляется вычислительной машиной, оснащённой системой датчиков и специ-

альных исполнительных механизмов. Измерение параметров давления жидкости и использование этих данных является содержанием одной из подсистем программного обеспечения в составе устройства автоматического управления течением вязкой жидкости.

Предполагается, что автоматическое управление изменениями давления вязкой сжимаемой жидкости, протекающей в пористой жидкость-проводящей магистрали, реализуется цифровой системой, структурная схема которой приводится на рисунке 2.

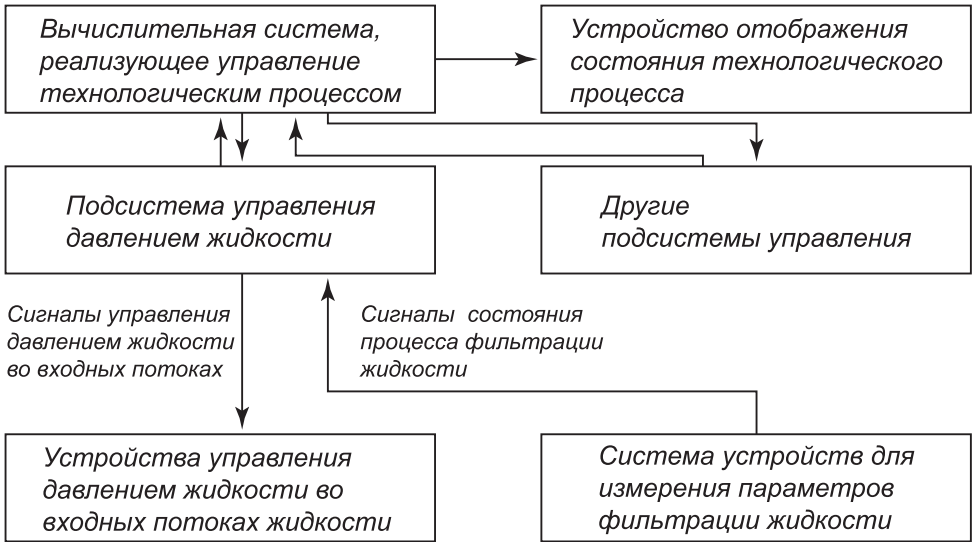

Рис. 2. Блок - схема системы управления течением жидкости в магистрали, имеющей пористую структуру.

При использовании вычислительной машины реализуются такие алгоритмы управления, которые базируются на идеологии использования мультипрограммных вычислительных процессов. При таком подходе предполагается, что система управления может подключаться к контролируемому ею технологическому процессу через некоторые промежутки времени. При каждом доступе к технологическому процессу может формироваться управляющее воздействие из списка заранее запрограммированных шагов управления либо считываться измеренные датчиками зна-

чения. Выбор таких воздействий происходит на основе результатов расчётов по одной из отобранных в систему контроля математических моделей ключевых технологических процессов. Кроме того, на основе предварительного анализа математических моделей технологических процессов осуществляется выбор некоторых параметров архитектуры этой системы управления. При построении рассмотренной ниже математической модели предполагается, что пористая структура жидкость-проводящей магистрали содержит равномерно распределённые по её длине проточные и застойные зоны. Часть практически важных жидкость-проводящих магистралей характеризуется тем, что они ограничиваются цилиндрической поверхностью, что проточные зоны расположены большей частью в центре вертикального поперечного сечения магистрали, а застойные зоны располагаются у стенок магистрали и могут интерпретироваться как результат накопления отложений. Примеры продольных сечений таких жидкость проводящих магистралей приведены на рисунке 3. При этом, если площадь поперечного сечения магистрали равна 1, а площадь проточных зон равна ν, то площадь застойных зон будет равна $(1-\nu)$.Значение параметра ν является важной характеристикой жидкость-проводящей магистрали и, поэтому, система управления должна дать сигнал оператору, как только оно опустится ниже критического уровня.

Вторым важным параметром, характеризующим течение вязкой жидкости по такой магистрали, является параметр γ, величина которого отражает обмен массами жидкости между проточными и застойными зонами. В примере, приведенном на рисунке 3, показано как форма застойных зон влияет на значения этого параметра. В левом примере течение вдоль магистрали будет вызывать вихревое течение внутри застойных

зон. При этом в каждой застойной зоне формируется один вихревой поток,непосредственно контактирующий с основным потоком вдоль магистрали. В среднем примере, возникают дополнительные вихревые потоки в ответвлениях от основных застойных зон. При изменении давления жидкости в проточных зонах будет происходить многоступенчатый обмен массами жидкости. Поэтому значение параметра γ в условиях левого примера больше значения этого параметра в условиях среднего примера. В правом примере возникает ещё более сложная система течений внутри застойных зон. Поэтому для значений параметра γ в каждом из приведённых примеров выполняется отношение, приведённое на рисунке 3.

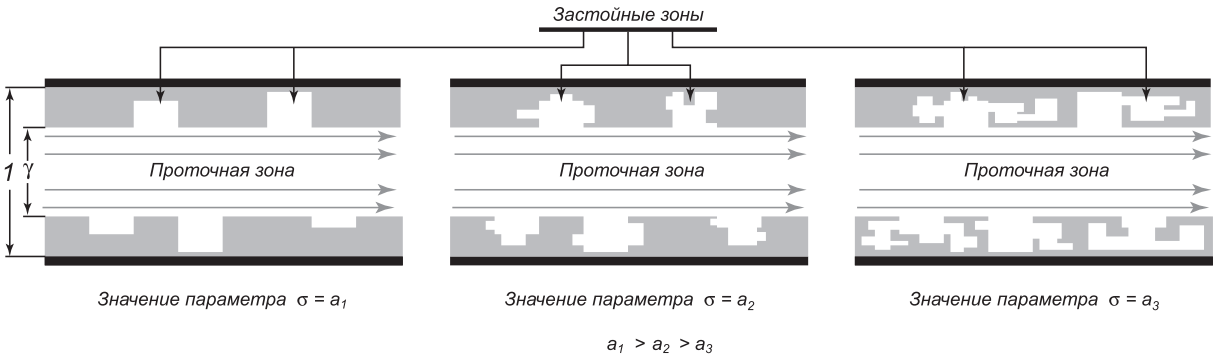

Рис.3. Иллюстрация изменения значений параметра γ, в зависимости от геометрии застойных зон.

Информация о давлении жидкости внутри магистрали доставляется в систему управления несколькими датчиками, измеряющими значения этого параметра. Число и расположение этих датчиков, а также алгоритмы предварительной обработки результатов измерений важные архитектурные детали системы управления, эскизный вариант которых намечается на основе анализа математической модели. Окончательные технические решения, при проектировании такой системы управления, принимаются на основе экспериментальных исследований и подтверждаются ис-

пытаниями, но результаты моделирования используются при планировании экспериментов, а так же при формировании программы испытаний. В рассмотренной ниже математической модели учитывается тот факт, что жидкость на вход магистрали подаётся периодически повторяющимися импульсами, разделенными во времени так, что каждый последующий импульс инициируется в тот момент, когда жидкость в начальной части магистрали уже пришла в равновесное состояние после изменений, вызванных предыдущем импульсом. Устройство управления входным потоком жидкости позволяют синтезировать эту функцию в форме кусочно-линейной функции. Пример использованного в настоящей работе входного импульса приведён на рисунке 4. При формировании входного импульса разработчики аппаратуры руководствуются принципом: максимально крутой взлет давления до максимального значения и затем медленное понижение давления до нулевого значения. Такое изменение входного давления жидкости порождает внутри магистрали течение жидкости в форме затухающей волны. Скорость распространения этой волны, а также степень сглаживания ее формы определяются физическими параметрами магистрали. Судить о значениях этих параметров приходится на основе результатов измерения давления. Информативность этих данных зависит от расположения датчика, точности результатов измерений, а так же использованного алгоритма первичной обработки результатов.

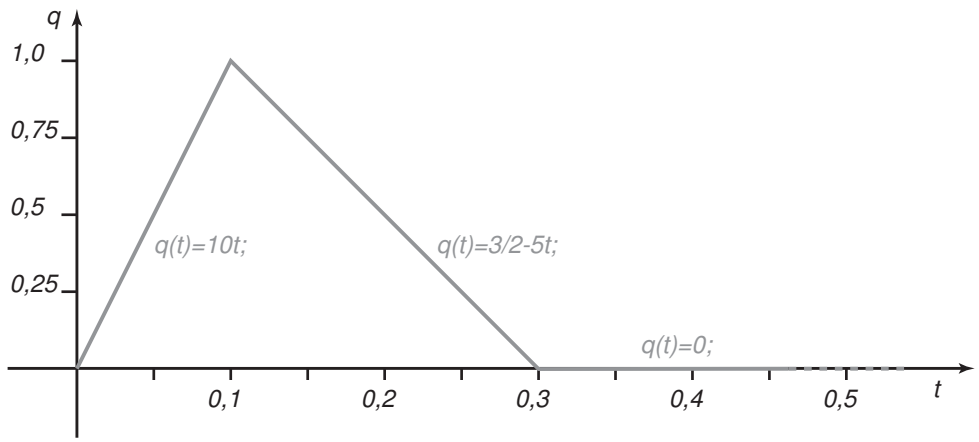

Рис. 4. Пример модельного импульса, использованного в численных экспериментах.

Получение рекомендаций об области возможного размещения датчиков давления и об их технических параметрах является целью настоящей работы. Как сказано выше, входной импульс изменения давления на входе жидкость-проводящей магистрали порождает в этой магистрали течение жидкости в форме изолированной волны. При этом момент формирования последующего входного импульса подобран так, что порожденное им волновое течение не взаимодействует с течением, порожденным как предшествующим, так и последующим импульсами. Поэтому при рассмотрении математической модели достаточно анализировать процессы, порожденные одиночным импульсом. Предположим, что порожденная импульсом волна полностью затухает в магистрали не вызывая отраженных течений. Поэтому для дальнейшего анализа можно использовать модель течения жидкости в полу бесконечной магистрали.

Для того чтобы управляющая вычислительная машина могла прогнозировать поведение жидкости в магистрали, в составе её программного обеспечения должна присутствовать подсистема моделирования движения жидкости на базе уравнения (1).Значения давления жидкости в ма-

гистрали может быть приближенно вычислено с использованием алгоритмов базирующихся на использовании разностных схем. Удовлетворительная точность вычислений с их помощью достигается при правильном выборе значений параметров $\triangle t$ и $\triangle x$, использованными при замене производных конечными разностями.

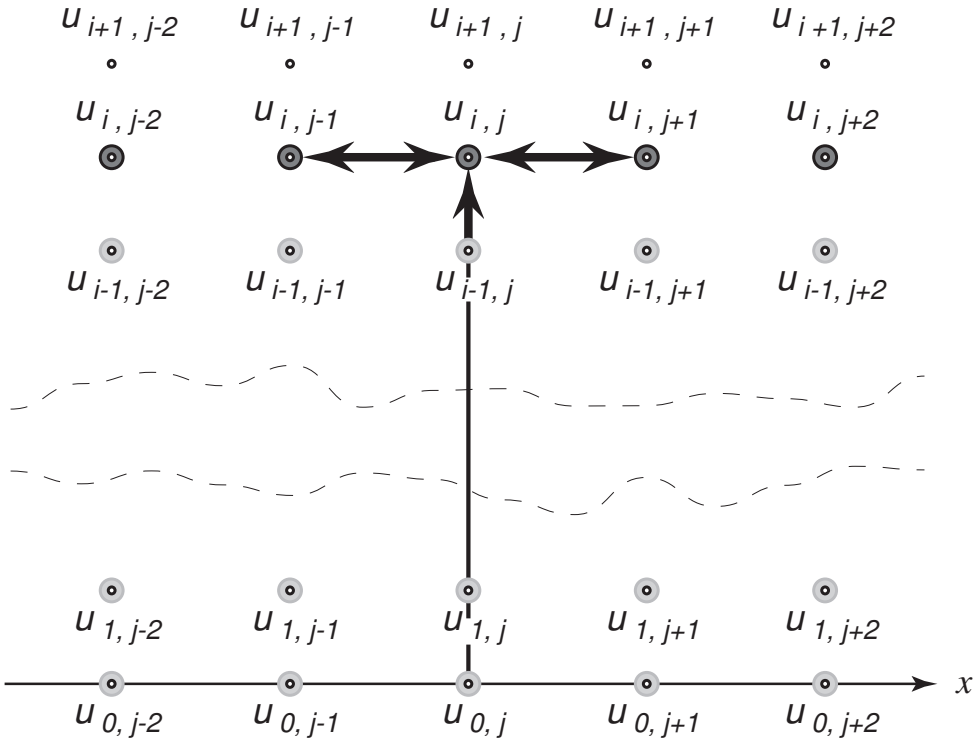

Рис. 5. Граф неявной разностной схемы для приближенного решения уравнения.

Графическое представление вычислительного графа, связанное с неявной разностной схемой, приведено на рисунке 5. Этот граф связывает те значения функции u на дискретной сетке, которые используются при вычислении значения $u_{i,j}$.Однонаправленная стрелка показывает, что в процессе вычислений значения этих параметров используются в качестве аргумента. Двунаправленная стрелка показывает, что значения этих параметров связаны со значением $u_{i,j}$ уравнением. Переменная $u_{i,j}$ пред-

ставляет приближенное значение решения уравнения при значении аргумента $t = i\triangle t$, $x = j\triangle x$. Светлым кружком, на рисунке, обведены уже вычисленные значения функции $u\ (i\triangle t, j\triangle x)$. Тёмным кружком обведены те значения функции, которые будут вычислены в результате решения системы уравнений. Жирной линией нарисовано стандартное графическое представление вычислительного графа для неявной разностной схемы параболического уравнения, а значения функции, лежащие на тонкой линии, участвуют в квадратурной формуле для вычисления интеграла.

Диссертация состоит из введения и трех глав, в которые входят 15 параграфов. Первая глава содержит необходимую терминологию, понятия и общие фундаментальные факты, связанные с теорией корректно разрешимых задач для уравнений в банаховом пространстве, которые соответствуют монографиям [17], [27], [29], [21], [52]. Здесь вводятся понятия векторных функций со значениями в банаховом пространстве. Указываются необходимые в дальнейшем их свойства, непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости по Бохнеру.

Вводятся понятия сильно непрерывных полугрупп, групп и косинусных функций (КОФ) линейных преобразований, их генераторов и их связи с корректной разрешимостью начально–краевых задач для уравнений вида

$$\frac{du}{dt} = Au(t), \tag{7}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Au(t), \tag{8}$$

($t \geq 0$ или $t \in (-\infty, \infty)$).

Вводятся понятия решений этих уравнений (§1.5) и равномерно корректной разрешимости, в смысле С.Г. Крейна, задачи Коши для этих

уравнений

$$u(0) = u_0 \in D(A), \tag{9}$$

в случае уравнения (7) и

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1,$$

в случае уравнения (8).

Указывается, что задача Коши (7)—(9) равномерно корректна, когда оператор A является генератором (производящим оператором) сильно непрерывной полугруппы $T(t)$. Решение имеет вид $u(t) = T(t)u_0$.

В случае задачи Коши (8)—(9) указывается, что задача равномерно корректна тогда и только тогда когда оператор A является генератором сильно непрерывной косинус–функции $C(t)$, при этом решение этой задачи имеет вид

$$u(t) = C(t)u_0 + \int_0^t C(s)u_1 ds.$$

Наряду с этим указываются критерии генераторов сильно непрерывных полугрупп (теорема Хилле–Филлипса). Отметим, что в Воронеже пионером в исследовании КОФ наряду с С.Г. Крейном является А.Г. Баскаков [4]. Позже к этой теме обратился В.А. Костин и его ученики [22], [23].

В §1.4 вводятся дробные степени для операторов A— таких, что $-A$ является генератором сильно непрерывной полугруппы класса C_0, удовлетворяющей оценке

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\omega t}, \qquad \omega \geq 0, t \geq 0.$$

Вторая третья главы содержат самостоятельные результаты.

Вторая глава посвящена исследованию корректной разрешимости задачи фильтрации в пористой среде.

В §2.1, 2.2 дается постановка задачи фильтрации в рамках общей теории для случая, когда пространственная переменная x меняется на всей положительной полуоси R^+.

В §2.3 ставятся задачи Дирихле и Неймана для случая, когда x меняется на конечном интервале.

В §2.2, 2.4 строятся необходимые понятия (C_0-полугруппа $U(t, -A)$ и $\sqrt{A}$), с помощью которых реализуется вычисление тепломассопотока на границе области, проведенные в §2.5.

В третьей главе предыдущие результаты по вычислению градиента давления применяются к построению модели автоматического регулирования течения вязкой сжимающей жидкости в пористой среде.

Глава 1

Корректно поставленные задачи

1.1 Вектор-функции и оператор-функции

Содержание этого параграфа соответствует монографиям [27],[28]. Здесь мы будем рассматривать *векторнозначные функции* $f(t)$ вещественного аргумента t, то есть функции значения которых при каждом $t \in [a, b] \subset R^1$ являются элементами некоторого линейного банахова пространства E.

Определение 1.1.1. Функция $f(t)$ называется *непрерывной в точке* t_0 , если $\|f(t) - f(t_0)\|_E \to 0$ при $t \to t_0$, и непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

При этом норма $\|f(t)\|_E$– есть скалярная непрерывная функция.

Замечание 1.1.1. Множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций со значениями в E образуют линейную систему $C(E; [a, b])$ в которой можно ввести норму

$$\|f\|_{C[a,b]} = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|_E. \tag{1.1.1}$$

После чего $C(E; [a, b])$ становится линейным нормированным пространством.

При этом, если E– банахово пространство, то $C(E;[a,b])$ также банахово пространство (см. [28], стр. 96).

Кроме введенного понятия (сильной) непрерывности функции $f(t)$, можно ввести понятие слабой непрерывности.

Определение 1.1.2. Функция $f(t)$ называется *слабо непрерывной (в точке, на отрезке,* если для любого непрерывного линейного функционала $l \in E'$ скалярная функция $l(f(t))$ непрерывна в точке (на отрезке).

Из сильной непрерывности вытекает слабая. Обратное неверно.

Справедливо следующее утверждение (см. [28], стр. 96):

слабо непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(t)$ ограничена на нем; то есть

$$\|f(t)\| \leq M \qquad (a \leq t \leq b).$$

Определение 1.1.3. Функция $f(t)$ называется *дифференцируемой в точке* t_0, если существует такой элемент $f' \in E$, что

$$\|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - f'\|_E \to 0$$

при $h \to 0$. Элемент f' называется *производной* функции $f(t)$ в точке t_0 и обозначается $f' = f'(t_0)$.

Функция $f(t)$ *дифференцируема на отрезке* $[a,b]$, если она дифференцируема в каждой точке этого отрезка.

Если при этом производная $f'(t)$ непрерывна, то функция $f(t)$ называется *непрерывно дифференцируемой.*

Для непрерывно дифференцируемых функций справедливо утверждение (см. [28], стр. 96):

Если функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a,b]$, то спра-

ведливо неравенство

$$\|f(b) - f(a)\|_E \leq (b - a) \sup_{a \leq t \leq b} \|f'(t)\|_E. \tag{1.1.2}$$

Это неравенство остается справедливым, если производная существует на отрезке $[a, b]$ всюду, за исключением счетного множества точек.

Определение 1.1.4. Говорят, что функция $f(t)$ имеет в точке t_0 *слабую производную* $f'(t_0)$, если при $h \to 0$

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h},$$

слабо сходится при всяком $l \in E'$ к $f'(t_0)$.

Другими словами это означает, что при всяком $l \in E'$ скалярная функция $l(f(t))$ непрерывно дифференцируема в точке t_0 и

$$[l(f(t_0))]' = l(f'(t_0)).$$

Если функция $f(t)$ имеет в каждой точке отрезка $[a, b]$ слабую производную, то сохраняется оценка (1.1.2).

В частности, если слабая производная равна нулю во всех точках отрезка $[a, b]$, то функция $f(x)$ постоянна.

Аналогично определяются производные любого порядка от векторнозначных функций.

Если функция $f(t)$ со значениями в банаховом пространстве E непрерывна на отрезке $[a, b]$, то предел интегральных сумм:

$$\lim \sum_{k=1}^{N} f(t_k)\Delta t_k = \int_a^b f(t)dt.$$

Здесь предел понимается в смысле сходимости по норме пространства E, когда диаметр разбиения $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ стремится к нулю.

Предел существует и не зависит от способа разбиения отрезка на части.

Справедлива оценка

$$\| \int_a^b f(t)dt\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt \tag{1.1.3}$$

и теорема о среднем

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)\overline{f},$$

где $\overline{f}$– элемент замкнутой выпуклой оболочки множества значений функции $f(t)$ на отрезке $[a, b]$.

Функция

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds$$

является непрерывно дифференцируемой и $F'(t) = f(t)$.

Для любой непрерывно дифференцируемой функции $F(t)$ справедлива *формула Ньютона–Лейбница.*

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a).$$

Так же, как и в классическом анализе, вводится понятие несобственного интеграла. Например, если функция непрерывна на $[a, b]$ при любом $b > a$, то под ее интегралом на $[a, \infty]$ понимают

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)dt.$$

Если предел по норме пространства E существует, то говорят, что интеграл сходится.

Интеграл абсолютно сходится, если

$$\int_a^\infty \|f(t)\|dt < \infty.$$

Из абсолютной сходимости интеграла следует обычная сходимость.

Можно рассматривать интегралы зависящие от параметра. На них переносятся классические теоремы о непрерывной зависимости от параметра, об интегрировании и дифференцировании по параметру.

Наиболее употребительным обобщением интеграла Римана для функций со значениями в банаховом пространстве является *интеграл Бохнера*

Определение 1.1.5. Функция $f(t)$, заданная на отрезке $[a, b]$, со значениями в банаховом пространстве E, называется *простой,* если она принимает лишь конечное заданное число значений f_j на измеримых множествах Δ_j.

$$f(t) = f_j \quad (t \in \Delta_i), \qquad \bigcup \Delta_j = [a, b].$$

(При определении простой функции на множестве бесконечной меры требуется, чтобы $mes(\Delta_j) < \infty$ и чтобы $f(t) = 0$ на дополнении к $\bigcup \Delta_j$).

Определение 1.1.6. Функция $f(t)$ называется *сильно измеримой,* если существует последовательность простых функций $f_n(t)$, сильно сходящаяся почти всюду к функции $f(t)$, то есть

$$\|f_n(t) - f(t)\|_E \to 0,$$

при $n \to \infty$ для всех $t \in [a, b]$, за исключением множества меры нуль.

Определение 1.1.7. Функция $f(t)$ называется *слабо измеримой,* если для всякого $l \in E'$ скалярная функция $l(f(t))$ измерима на $[a, b]$.

Для всякого пространства E, содержащего счетное всюду плотное множество, понятия слабой и сильной измеримости совпадают ([28], стр. 100).

Справедливо утверждение, что если $f(t)$ сильно измерима, то ее норма $\|f(t)\|_E$ является измеримой скалярной функцией.

Для простых функций $f(t)$ интеграл определяется единственным образом:

$$\int_a^b f(t)dt = \sum f_j mes \Delta_j.$$

Определение 1.1.8. Функция $f(t)$ называется *суммируемой (интегрируемой) по Бохнеру* на отрезке $[a, b]$, если существует сходящаяся к

ней почти всюду последовательность простых функций $f_n(t)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \|f(t)-f_n(t)\|_E dt = 0.$$

При этом интегралом суммируемой функции $f(t)$ называется предел

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Предел понимается в смысле сходимости по норме, то есть

$$\|\int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt\|_E \to 0$$

при $n\to\infty$.

Справедлива следующая

Теорема ([28], стр. 101). *Для того, чтобы функция $f(t)$ была суммируемой по Бохнеру, необходимо и достаточно, чтобы она была сильно измеримой и чтобы ее норма $\|f(t)\|$ была суммируемой.*

Для интеграла Бохнера справедлива оценка (1.1.3).

Также функция $F(t)$, представимая неопределенным интегралом

$$F(t) = \int_a^t f(s)ds$$

от суммируемой функции $f(t)$, почти во всех точках отрезка $[a,b]$ имеет сильную производную, причем в этих точках $F'(t) = f(t)$.

Если A– ограниченный линейный оператор, отображающий банахово пространство E в банахово пространство F, и $f(t)$– суммируемая функция со значениями в E то

$$\int_a^b Af(t)dt = A\int_a^b f(t)dt.$$

Совокупность всех суммируемых на $[a,b]$ функций со значениями в банаховом пространстве E образуют линейную систему $L_1(E,[a,b])$, в которой вводится норма

$$\|f\|_{L_1(E;[a,b])} = \int_a^b \|f(t)\|dt.$$

В этой норме пространство $L_1(E;[a,b])$ банахово.

Кроме того, аналогично скалярному случаю вводятся банаховы пространства $L_p(E;[a,b])$ $(1 \leq p < \infty)$ с нормой

$$\|f\|_{L_p(E;[a,b])} = [\int_a^b \|f(t)\|^p dt]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

и

$$\|f\|_{L_\infty(E;[a,b])} = vrai\ sup_{t\in[a,b]}\|f(t)\|, \quad p = \infty.$$

1.2 Сильно непрерывные полугруппы

Пусть E_1 и E_2 банаховы пространства. Оператор–функции $A(t)$ (то есть функции, значениями которых являются ограниченные операторы) являются частными примерами функций со значениями в банаховом пространстве ограниченных операторов, действующих из E_1 в E_2.

Для оператор–функций определяются три вида непрерывности: а) непрерывность по норме, б) сильная непрерывность, в) слабая непрерывность.

Определение 1.2.1. Будем говорить, что оператор–функция $A(t)$ *непрерывна по норме* в точке $t_0 \in [a,b]$, если

$$\lim_{t\to t_0} \|A(t) - A(t_0)\| = 0.$$

Определение 1.2.2. Оператор–функция $A(t)$ *сильно непрерывна* в точке $t_0 \in [a,b]$, если при любом фиксированном $x \in E_1$

$$\lim_{t\to t_0} \|A(t)x - A(t_0)x\|_{E_2} = 0.$$

Определение 1.2.3. Оператор–функция $A(t)$ слабо непрерывна в точке $t_0 \in [a, b]$, если при любых фиксированных $x \in E_1$, $l \in E_2^*$

$$\lim_{t \to t_0} |l(A(t)x) - l(A(t_0)x| = 0.$$

Аналогично определяются понятия дифференцируемости (дифференцируемости по норме операторов), сильной дифференцируемости (дифференцируемости всех функций $A(t)x, x \in E_1$) и слабой дифференцируемости (дифференцируемости скалярной функции $l(A(t)x, x \in E_1, l \in E_2^*$).

Справедлива

Теорема (Банах–Штейгауз). *Оператор–функция $A(t)$ сильно непрерывна при $t_0 \in [a, b]$ на всем E_1, если нормы ее равномерно ограничены, то есть*

$$\|A(t)\| \leq M,$$

и функции $A(t)x$ непрерывны для x из некоторого плотного в E_1 множества.

Неограниченные операторы. Пусть E– банахово пространство и A– линейный оператор, определенный на некотором линейном множестве $D(A) \subset E$ и принимающий значения в E.

Определение 1.2.4. Говорят, что A *замкнут*, если из того что $x_n \in D(A)$, $\|x_n - x_0\|$ и $Ax_0 = y_0$.

Справедливы следующие утверждения: (см. [28], §13.2).

Если при некотором $\lambda \in C$ оператор $\lambda I + A$ имеет обратный, то оператор A замкнут.

Пусть значение функции $x(t)$ при каждом $t \in [a, b]$ принадлежат $D(A)$

и функция $Ax(t)$ интегрируема на $[a, b]$. Тогда выполняется равенство

$$A\int_a^b x(t)dt = \int_a^b Ax(t)dt.$$

Наиболее важными характеристиками линейных операторов, определенных на линейном многообразии $D(A)$ комплексного банахова пространства E и действующих в это же пространство E является спектр и резольвента оператора.

Понятие спектра оператора связано с рассмотрением уравнения

$$Ax - \lambda x = y \qquad x \in D(A), y \in E), \tag{1.2.1}$$

где λ– комплексное число.

Определение 1.2.5. Число λ называется *регулярной точкой* оператора A, если уравнение (1.2.1) корректно и плотно разрешимо. То есть однородное уравнение

$$Ax - \lambda x = 0$$

имеет только нулевое решение, для любого $x \in D(A)$ справедливо неравенство

$$\|x\|_E \leq k\|(A - \lambda I)x\|_E,$$

и замыкание области значений оператора $A - \lambda I$ совпадает с E.

Определение 1.2.6. Совокупность всех регулярных точек называется *резольвентным множеством* оператора A.

Определение 1.2.7. Дополнение на комплексной плоскости к резольвентному множеству называется *спектром оператора* A.

Если оператор A замкнут, то его резольвентное множество состоит из тех и только тех точек λ, для которых существует ограниченный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, заданный на всем пространстве E.

Определение 1.2.8. Определенный при регулярных λ, оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ называется *резольвентой оператора* A и обозначается $R(\lambda, A)$.

Для замкнутого оператора резольвентное множество является открытым подмножеством комплексной плоскости, спектр–замкнутое множество.

Резольвента $R(\lambda, A)$ является на резольвентном множестве аналитической функций со значениями в пространстве $L(E, E)$ линейных ограниченных операторов.

Для любых двух регулярных точек λ и μ справедливо *резольвентное тождество Гильберта*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\lambda - \mu)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

Из этого тождества выводится формула для производных

$$\frac{d^k R(\lambda, A)}{d\lambda^k} = k! R^{k+1}(\lambda, A).$$

Классификация точек спектра. Приняты следующие определения.

1. λ принадлежит *точечному спектру*, если оператор $A-\lambda I$ не имеет обратного.

2. λ принадлежит *остаточному спектру*, если оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ определен на не плотном множестве.

3. λ принадлежит *непрерывному спектру*, если оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ определен на плотном множестве, но неограничен.

Таким образом, вся комплексная плоскость разлагается в сумму четырех взаимно непересекающихся множеств: резольвентное множество, точечный, остаточный и непрерывный спектры.

Если оператор задан каким–либо аналитическим выражением, то структура его спектра существенно зависит от того пространства в котором

он исследуется.

Экспоненциальная функция, группы и полугруппы операторов.

Если оператор A, действующий в банаховом пространстве E, ограничен, то можно ввести с помощью ряда экспоненциальную функцию

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Эта функция непрерывна по t в смысле нормы оператора и удовлетворяет групповому соотношению

$$e^{tA} e^{sA} = e^{(t+s)A}. \tag{1.2.2}$$

Оказывается, что вообще семейство операторов $U(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, *непрерывно по норме* зависящих от t и удовлетворяющих соотношениям

$$U(t)U(s) = U(t+s) \qquad (-\infty < t < \infty),$$

$$U(0) = I,$$

представимо в виде e^{tA}, где A– ограниченный оператор.

Оператор A можно найти основываясь на том, что группа $U(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению для экспоненты

$$\frac{dU(t)}{dt} = AU(t),$$

поэтому оператор A можно определить как производную от группы $U(t)$ в нуле, то есть

$$Ax = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(U(h) - I)x \tag{1.2.3}$$

В связи с этим оператор A называется *производящим оператором (или генератором) группы* $U(t)$.

Если отказаться от непрерывности по норме экспоненциальной функции и потребовать только ее *сильную непрерывность по* t, то объект

оказывается значительно более богатым. Производящий оператор A снова вводится равенством (1.2.3) на всех тех $x \in E$, для которых предел существует. В этом случае он может быть уже неограниченным оператором, однако A является замкнутым и имеющим плотную в E область определения.

Дальнейшее обобщение понятия экспоненциальной функции от оператора связано с отказом от требования определения этой функции при $t < 0$.

В связи с этим возникли следующие определения:

Определение 1.2.9. Семейство ограниченных операторов $U(t)$ $(t > 0)$, действующих в банаховом пространстве E, называется *сильно непрерывной однопараметрической полугруппой операторов* , если $U(t)$ сильно непрерывно зависит от t и удовлетворяет условию $U(t)U(s) = U(t+s)$ $(t, s > 0)$.

Определение 1.2.10. Говорят, что $U(t)$– *полугруппа класса* C_0, если она сильно непрерывна и

$$\lim_{t \to 0+} \|U(t)x - x\|_E = 0 \tag{1.2.4}$$

при любом $x \in E$.

Для полугрупп класса C_0 также вводится понятие производящего оператора по формуле (1.2.3.) как производной справа от полугруппы в нуле.

Существует классический критерий определения производящего оператора C_0– полугруппы, принадлежащий пяти авторам: Э. Хилле, Р. Филлипс, К.Иосида, В. Феллер, И. Миадера, который содержится в следующей теореме

Теорема (ХФИФМ) (см. [28], стр. 133.)

Для того чтобы линейный оператор A был производящим операто-

ром (генератором) полугруппы $U(t)$ класса C_0, необходимо и достаточно, чтобы он был замкнутым с плотной в E областью определения, имел спектр лежащий в полуплоскости $Re\lambda \leq \omega$ и резольвенту, удовлетворяющую условиям

$$\|R^m(\lambda, A)\| \leq \frac{K}{(\lambda - \omega)^m}, \quad \lambda > \omega \tag{1.2.5}$$

и $m = 1, 2, \ldots,$ где M не зависит от λ и m.

Отметим, что условия на все степени резольвенты трудно проверяемы. В связи с этим крайне важной является достаточное условие на резольвенту

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \lambda > \omega. \tag{1.2.6}$$

из которого легко следует (1.2.5).

Для полугруппы $U(t)$ класса C_0 справедлива оценка

$$\|U(t)\| \leq Ke^{\omega t} \tag{1.2.7}$$

и если $\omega \leq 0$, то полугруппа удовлетворяет оценке

$$\|U(t)\| \leq K \tag{1.2.8}$$

и называется равномерно ограниченной C_0–полугруппой (см.[17], с.292).

Если $K = 1$, то полугруппа называется сжимающей C_0–полугруппой. Умножив C_0–полугруппу на $e^{-\omega t}$, очевидно получим новую полугруппу класса C_0 с условием равномерной ограниченности.

Построение полугруппы по производящему оператору можно произвести с помощью интеграла Коши

$$U(t)x = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda, A) x d\lambda \quad .$$

При $x \in D(A)$ и $t > 0$ этот интеграл сходится в смысле главного значения и определяет на плотном в E множестве $D(A)$ ограниченный

оператор, который замыканием доопределяется на всем пространстве E. При этом $U(t)$ сильно сходится к I при $t \to +0$.

Имеются и другие формулы, показывающие связь между полугруппами и экспоненциальной функцией, например

1. $U(t)x = \lim\limits_{h\to 0} e^{tA_h}x$, где $A_h = \frac{U(h)-I}{h}$;
2. $U(t)x = \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tJ_\lambda}x$, где $J_\lambda = -\lambda I - \lambda^2 R(\lambda(A, A)$;
3. $U(t)x = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}A^k x + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}U(s)A^n x ds$; $(x \in D(A^n))$;
4. $U(t)x = \lim\limits_{k\to\infty}(I - \frac{t}{k}A)^{-k}x$.

Следует заметить, что наличие экспоненциальной функции от оператора позволяет вычислять различные другие функции от оператора с помощью обобщения преобразования Лапласа. Так, для производящего оператора A полугруппы класса C_0 резольвента имеет вид

$$R(\lambda, A) = -\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)dt \quad (Re\lambda > \omega).$$

Если в оценке (1.2.7) $\omega < 0$, то можно определить дробные степени оператора $-A$ по формуле

$$(-A)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}U(t)dt.$$

при $0 < \alpha < 1$ оператор $-(-A)^\alpha$ также будет производящим оператором сильно непрерывной полугруппы.

Отметим, что если семейство ограниченных операторов $U(t)$ $(0 < t < \infty)$ обладает полугрупповым свойством, то из измеримости функций $U(t)x$ при каждом $x \in E$ следует сильная непрерывность полугруппы $U(t)$ при $t > 0$ (см. [7]). Отсюда следует существование предела

$$\lim_{t\to\infty}\frac{ln\|U(t)\|}{t} = \omega,$$

называемого *типом полугруппы.*

Таким образом, требование сильной непрерывности полугруппы при $t > 0$ является естественным и оно влечет за собой определенный характер поведения полугруппы на бесконечности.

В связи с этим выделение новых типов полугрупп и их классификация в основном ведется по признаку поведения полугрупп в окрестности точки $t = 0$. Многочисленные результаты в этом направлении изложены в [41].

Следующие примеры C_0– полугрупп и их производящих операторов можно найти в [10], [20] гл. IX., [27], [28].

Примеры C_0 полугрупп

Пример 1. Полугруппа левых сдвигов

$$T(t)x(s) = x(t+s) \qquad (t \geq 0)$$

является сжимающей полугруппой класса C_0 в пространствах $C[0,\infty]$ ограниченных и равномерно непрерывных вещественных (или комплексных) функций $x(s)$ и $L_p(-\infty,\infty)$ $(p < \infty)$ пространствах.

Производящим оператором этой полугруппы является дифференциальный оператор $\frac{d}{ds}$ с областью определения:

В первом случае $D(A) = \{x(s) : x(s) \in C[0,\infty],\, x'(s) \in C[0,\infty)\}$.

Во втором случае $D(A) = \{x(s) : x(s) \in L_p[0,\infty),\, x'(s) \in L_p[0,\infty)\}$.

Пример 2.

$$(T(t)x)(s) = \begin{cases} x(s-t), & s \geq t; \\ 0, & s < t \end{cases}$$

является полугруппой правых сдвигов класса C_0 в пространствах $C(0,[0,\infty])$ ограниченных и равномерно непрерывных функций на $[0,\infty]$, с условием $x(0) = 0$.

Производящим оператором этой полугруппы является дифференциальный оператор $-\frac{d}{ds}$ с областью определения $D(A) = \{x(s) : x(s) \in C[0,\infty],\ x'(s) \in C[0,\infty]\}$.

Новые примеры функциональных пространств в которых полугруппы сдвигов являются сильно непрерывными рассматриваются в последующих главах.

Пример 3. Полугруппа Вейерштрасса

$$(T(t)x)(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s-\xi)^2}{4t}} x(\xi) d\xi$$

является сжимающей полугруппой класса C_0 в пространствах $C[-\infty,\infty]$ ограниченных и равномерно непрерывных функций на $[-\infty,\infty]$, а также в пространствах $L_p(-\infty,\infty)$.

Производящим оператором этой полугруппы является дифференциальный оператор $\frac{d^2}{ds^2}$ с областью определения $D(A) = \{x(s) : x(s) \in C[-\infty,\infty],\ x''(s) \in C[-\infty,\infty]\}$ в первом случае, и $D(A) = \{x(s) : x(s) \in L_p[-\infty,\infty],\ x''(s) \in L_p[-\infty,\infty]\}$ во втором случае.

Пример 4. Полугруппа Пуассона

$$T(t)x(s) = \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\xi)}{t^2 + (s-\xi)^2} d\xi$$

является сжимающей полугруппой класса C_0 в пространствах $C[-\infty,\infty]$ и $L_p(-\infty,\infty)$. Производящим оператором этой полугруппы является сингулярный интегральный оператор

$$Ax(s) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s-\xi) - x(s)}{\xi^2 + h^2} d\xi$$

.

Пример 5. Пусть $\lambda > 0$, $\mu > 0$ в пространстве $C[-\infty,\infty]$ операторы $T(t)$ определенные равенством

$$(T(t)x)(s) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)}{k!} x(s - k\mu) \quad (t \le 0)$$

являются сжимающей полугруппой.

В этом случае производящим оператором является разностный оператор A вида

$$(Ax)(s) = \lambda[x(s-\mu) - x(s)].$$

1.3 Корректная разрешимость задачи Коши для уравнения 1–го порядка

С понятием сильно непрерывных групп тесно связано важное понятие сильно непрерывных косинус функций (КОФ). Исследованию КОФ посвящены работы многих математиков, начиная с работ С. Куренны, М. Совы, Г.О. Фатторини. Из воронежских математиков изучением КОФ занимались А.Г. Баскаков, В.А. Костин и др.

Определение 1.3.1. Сильно непрерывной *операторной косинус–функцией* называется семейство операторов $C = \{C(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset B(E)$, удовлетворяющее условиям

(i) $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$

(ii) $C(0) = I$

(iii) $C(t)\varphi$— непрерывная функция для каждого $\varphi \in E$.

Определение 1.3.2. *Генератором* A операторной косинус–функции C называется оператор $A = C''(0)$. Его областью определения является множество тех $\varphi \in E$, для которых функция $C(t)$ дважды дифференцируема в точке $t = 0$. Операторные косинус–функции C и (C_0)– полугруппы T связаны между собой формулой ([9], с. 178)

$$T(t)\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} C(s)\varphi ds. \tag{1.3.1}$$

В дальнейшем нам понадобится следующее (см. [9], с. 179)

Утверждение 1.3.1. Пусть B порождает (C_0)– группу $T(t)$. Тогда $A_a = B^2 + aI$, $(a > 0)$ порождает операторную косинус–функцию $C_a(t)$ и справедливо представление

$$C_a(t)\varphi = C_0(t)\varphi(x) + at\int_0^t (t^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} I_1[a(t^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}]C_0(s)ds, \qquad (1.3.2)$$

где $C_0(t) = \frac{1}{2}[T(t) + T(-t)]$, $I_1(s)$— модифицированная функция Бесселя порядка 1.

Следующие факты связывают понятия (C_0)– полугруппы и (C_0)– косинус функции с корректной разрешимостью задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве первого и второго порядков.

$$u'(t) = Au(t) \qquad (1.3.3)$$

$$u''(t) = Au(t) \qquad (1.3.4)$$

Определение 1.3.3. [11, с. 38] Решением уравнения (1.3.3) на отрезке $[0.t_0]$ называется функция $u(t)$, удовлетворяющая условиям: 1) $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in [0, t_0]$, 2) в каждой точке $t \in [0, t_0]$ существует сильная производная $u'(t)$, 3) уравнение (1.3.1) удовлетворяется при всех $t \in [0, t_0]$.

Под задачей Коши на $[0, t_0]$ понимают задачу о нахождении решения уравнения (1.3.3), удовлетворяющее условию

$$u(0) = u_0 \in D(A). \qquad (1.3.5)$$

Определение 1.3.4 Задача Коши поставлена корректно на отрезке $[0, t_0]$ если: 1) при любом $u_0 \in D(A)$ существует ее единственное решение и это решение непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что из $x_0(0) \to 0$ следует, что $x_n(t) \to 0$ равномерно по t на каждом компакте из $[0, t_0]$.

Теорема 1.3.1. ([27], с. 64) Задача (1.3.3)—(1.3.5) равномерно корректна тогда и только тогда когда A является генератором (C_0)– полугруппы $T(t)$, при этом решение имеет вид

$$u(t) = T(t)\varphi \tag{1.3.6}$$

и существуют константы M и ω, не зависящие от φ такие, что выполняется оценка

$$\|u(t)\| \leq Me^{\omega t}\|\varphi\|. \tag{1.3.7}$$

Аналогично, для уравнения (1.3.4) решается задача с условиями Коши

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1. \tag{1.3.8}$$

Эта задача называется равномерно корректной если существует подпространство $M \subset E$ такое, что задача (1.3.4)–(1.3.8) имеет единственное решение для $u_0, u_1 \in M$ и когда $u_0^{(n)}, u_1^{(n)}$, $(n = 0, 1, \dots)$ являются последовательностью начальных данных в M, стремящихся к нулю, то соответствующее решение $u^{(n)}(t)$ стремится к нулю в метрике E, равномерно на каждом компакте из $[0, \infty)$.

Теорема 1.3.2. (Сова, Куррена , см. [9], с. 176) Задача (1.3.4)–(1.3.8) равномерно корректна тогда и только тогда когда A— генератор (C_0)– косинус функции $C(t)$, при этом решение имеет вид

$$u(t) = C(t)\varphi + \int_0^t C(s)\psi ds \tag{1.3.9}$$

и при некоторых константах M и ω не зависящих от φ и ψ выполняется оценка

$$\|C(t)\varphi\| \leq Me^{\omega t}\|\varphi\|. \tag{1.3.10}$$

Новые примеры косинус–функций являются предметом изучения в последующих главах диссертации, в связи с корректной разрешимостью рассматриваемых там задач.

1.4 Дробные степени операторов

В исследовании корректной разрешимости начально–краевых задач для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченными операторами важное место занимают дробные степени этих операторов. В частности, это относится к так называемым позитивным операторам см. [27], с. 135.

Определение 1.4.1. Оператор A с плотной областью определения будем называть *позитивным,* если при всех $t > 0$ существуют операторы $(A + tI)^{-1}$ и если

$$\|(A + tI)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + t} \tag{1.4.1}$$

Позитивные операторы не обязательно являются производящими операторами сильно непрерывных полугрупп.

Из (1.4.1) следует, что резольвентное множество $\rho(A)$ содержит все круги $|\lambda + t| < \frac{1+t}{C}$ $(t > 0)$ и, в частности сектор

$$|\arg \lambda - \pi| < \arcsin \frac{1}{C} \tag{1.4.2}$$

В этом случае оператор A имеет обратный. При этом для $z \in G_1$ выполняется оценка

$$\|(A - zI)^{-1}\| \leq \frac{1}{dist(z, \partial G_1)}, \tag{1.4.3}$$

здесь $dist(z, \partial G_1)$– расстояние от точки z до границы ∂G_1 области G_1.

Определение 1.4.2. ([27], стр. 298) Оператор A называется *сильно позитивным,* если он удовлетворяет более сильному, чем условие (1.4.1.) неравенству

$$(\|A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + |\lambda|} \qquad (Re\lambda \leq 0). \tag{1.4.4}$$

то есть резольвентное множество содержит сектор G_1.

Определение 1.4.3. Оператор *слабо позитивен*, если сектор G_2 имеет вершину в нуле.

Оказывается, что для введения дробных степеней можно ослабить условие позитивности.

Как известно, для производящих операторов C_0-полугрупп, удовлетворяющих оценке

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\omega t}, \qquad \omega > 0, t > 0, M > 0, \tag{1.4.5}$$

определены дробные степени $(-A)^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$ формулой Балакришнана (см. [17], с. 358)

$$(-A)^\alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{(T(t) - I)x}{t^{1+\alpha}} dt, \quad (x \in D(A)). \tag{1.4.6}$$

И для резольвенты оператора $A_\alpha = -(-A)^\alpha$ справедливо представление

$$(\mu I - A_\alpha)^{-1} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty (rI - A)^{-1} \frac{r^\alpha dr}{\mu^2 - 2\mu r^2 \cos \alpha\pi + r^{2\alpha}}. \tag{1.4.7}$$

Оператор A_α является производящим оператором аналитической полугруппы $T_\alpha(t)$, равностепенно непрерывной и удовлетворяющей C_0- условию.

Справедлива следующая

Теорема 1.4.1. *Если A - генератор C_0-полугруппы, удовлетворяющей оценке (1.4.5), то для полугрупп $T_\alpha(t)$, генераторами которых являются операторы $-(-A)^\alpha$, справедлива оценка*

$$\|T_\alpha(t)\| \leq Me^{-\omega^\alpha t}, \tag{1.4.8}$$

где константы M и ω из (1.4.5).

Доказательство этого факта см. в [21].

Лемма 1.4.1. *Если оператор A удовлетворяет условиям теоремы 1.4.1, то для резольвенты оператора $A_\alpha = -(-A)^\alpha$ имеет место оценка*

$$\|(\mu I - A_\alpha)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\mu + \omega^\alpha)^n}, \tag{1.4.9}$$

где константы M и ω из (1.4.5).

1.5 Корректная разрешимость граничных задач для уравнения 2–го порядка

В банаховом пространстве E рассматривается однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t), \qquad (0 \leq t \leq T) \tag{1.5.1}$$

где A–линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в E, с областью определения $D(A)$.

Приведем необходимые нам известные результаты связанные с корректной разрешимостью краевых задач для уравнения (1.5.1), изложенные в [27] гл.III.

В [27] уравнение (1.5.1) рассматривается в предположении сильной позитивности оператора A в соответствии со следующим определением

Определение 1.5.1. Решением уравнения (1.5.1) будем называть функцию $u(t)$ со значениями в $D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую (1.5.1) на отрезке $[0, T]$.

Так как сильная позитивность оператора A гарантирует существование его дробных степеней и, в частности, операторов $A^{-\frac{1}{2}}$ и $A^{\frac{1}{2}}$, причем оператор $-A^{\frac{1}{2}}$ является производящим оператором полугруппы $V(t)$

класса C_0. При этом для $z_0 \in D(A)$ и $w_T \in D(A)$ функции

$$z(t) = V(t)z_0 \qquad w(t) = V(T-t)w_T \tag{1.5.2}$$

порождают решения уравнения (1.5.1). Однако решения уравнения (1.5.1) на интервале $0 < t < T$ будут бесконечно дифференцируемы при любых $z_0, w_T \in E$.

В связи с этим вводятся следующие определения, классифицирующие понятие решения в зависимости от поведения на концах отрезка $[0, T]$.

Определение 1.5.2. Функция $u(t)$ называется *ослабленным решением* уравнения (1.5.1) если: 1) она непрерывна и имеет непрерывную первую производную на отрезке $[0, T]$ и вторую производную на $(0, T)$, то есть

$$u'(t) \in C[0, T], u'' \in C(0, T); \tag{1.5.3}$$

2) ее значения принадлежат $D(A)$ при $0 < t < T$, а функция $A^{\frac{1}{2}}u(t)$ непрерывна на всем отрезке $[0, T]$, то есть

$$u(t) \in D(A), \qquad 0 < t < T; \tag{1.5.4}$$

$$A^{\frac{1}{2}}u(t) \in C[0, T]; \tag{1.5.5}$$

3) $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1.5.1) в интервале $(0, T)$, то есть

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t), \qquad t \in (0, T). \tag{1.5.6}$$

Определение 1.5.3. Функция $u(t)$ называется *обобщенным решением* уравнения (1.5.1), если: 1) она удовлетворяет условиям (1.5.3), а функция $A^{-\frac{1}{2}}u(t)$ имеет непрерывную вторую производную на $(0, T)$, то есть

$$A^{-\frac{1}{2}}u(t) \in C^1[0, T]; \tag{1.5.7}$$

2) она удовлетворяет условиям (1.5.4), (1.5.6).

В [27] рассматриваются лишь ослабленные или обобщенные решения уравнения (1.5.1).

Справедлива следующая

Теорема 1.5.1. ([27], стр.307). *Всякое обобщенное решение уравнения (1.5.1) имеет вид*

$$u(t) = V(t)z_0 + V(T-t)w_T \tag{1.5.8}$$

и наоборот, функция вида (1.5.8) является обобщенным решением уравнения (1.5.1) при любых $z_0, w_T \in E$.

Для того чтобы обобщенное решение (1.5.8) было ослабленным, необходимо и достаточно, чтобы $z_0, w_T \in D(A^{\frac{1}{2}})$. Все обобщенные решения уравнения (1.5.1) являются аналитическими функциями от t при $0 < t < T$.

Краевая задача.

Введем в рассмотрение систему краевых условий вида

$$L_1(u) = \alpha_{11}u_0 + \alpha_{12}u_0' + \beta_{11}u_T + \beta_{12}u_T' = f_1;$$

$$L_2(u) = \alpha_{21}u_0 + \alpha_{22}u_0' + \beta_{21}u_T + \beta_{22}u_T' = f_2, \tag{1.5.9}$$

где $\alpha_{ij}, \beta_{ij} (i, j = 1, 2)$–комплексные числа, f_1, f_2–заданные элементы пространства E, $u_0 = u(0), u_0' = u'(0), u_T = u(T), u_T' = u'(T)$. Формы $L_1(u)$ и $L_2(u)$ предполагаются линейно независимыми.

Определение 1.5.4. Если ослабленное решение $u(t)$ уравнения (1.5.1) удовлетворяет краевым условиям (1.5.9), то оно называется *ослабленным решением* краевой задачи (1.5.1)-(1.5.9).

Обозначая $A^{\frac{1}{2}}z_0 = g_1$ и $A^{\frac{1}{2}}w_T = g_2$, любое ослабленное решение уравнения (1.5.1) можно записать в виде

$$u(t) = V_1(t)g_1 + V_2(t)g_2, \tag{1.5.10}$$

где $V_1(t) = V(t)A^{-\frac{1}{2}}$ и $V_2(t) = V(T-t)A^{-\frac{1}{2}}$, и g_1 и g_2–некоторые элементы из E.

Вводя операторный определитель

$$D = \begin{vmatrix} L_1(V_1) & L_1(V_2) \\ L_2(V_1) & L_2(V_2) \end{vmatrix}, \tag{1.5.11}$$

называемый *характеристическим определителем*, для решения задачи (1.5.1)-(1.5.9) получается представление

$$Du(t) = S_1(t)f_1 + S_2(t)f_2, \tag{1.5.12}$$

где

$$S_1(t) = V_1(t)L_2(V_2) - V_2(t)L_2(V_1),$$

$$S_2(t) = -V_1(t)L_1(V_2) + V_2(t)L_1(V_1). \tag{1.5.13}$$

Оператор D является линейным ограниченным в E оператором коммутирующим с операторами $A^{-\frac{1}{2}}$, $V(T)$,$V(T)A^{-\frac{1}{2}}$.

Определение 1.5.5. Всякую непрерывную на $[0, T]$ функцию $u(t)$, удовлетворяющую соотношению (1.5.12), называют *обобщенным решением* краевой задачи (1.5.1)-(1.5.9).

Таким образом для представления решения задачи (1.5.1)-(1.5.9) необходимо исследовать вопрос о существовании обратного оператора D^{-1} и его вязи с операторами $L_i(V_j)$. Здесь возникают разные возможности связанные с различными свойствами краевой задачи.

Равномерно корректные краевые задачи. Регулярные краевые условия.

Определение 1.5.6. Краевая задача (1.5.1)-(1.5.9) называется *равномерно корректной*, если для всяких f_1 и f_2 из E существует единственное

обобщенное решение этой задачи, непрерывно зависящее в норме пространства $C(E)$ от f_1 и $f_2 \in E$.

Справедлива следующая

Теорема 1.5.2. ([27], с. 316). *Для того, чтобы задача (1.5.1)-(1.5.9) была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы операторы $D^{-1}S_1(t)$ и $D^{-1}S_2(t)$ были равномерно ограниченными на $[0,T]$.*

Для равномерной корректности задачи также как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений существенную роль играет свойство регулярности краевых условий.

В рассматриваемом случае краевые условия регулярны лишь когда выполнено одно из условий

1. $d_{24} \neq 0$,

$$d_{24} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} \\ \alpha_{22} & \beta_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

2. $d_{24} = 0$, но $|\alpha_{12}| + |\beta_{12}| > 0$ и

$$d_{23} - d_{14} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{11} \\ \alpha_{22} & \beta_{21} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.5.14}$$

3. $\alpha_{12} = \beta_{12} = \alpha_{22} = \beta_{22} = 0$, но $d_{13} \neq 0$,

$$d_{13} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Примерами регулярных краевых условий являются условие Дирихле

$$u(0) = f_1, u(T) = f_2$$

и условие Неймана

$$u'(0) = f_1, u'(T) = f_2.$$

Справедливы следующие теоремы

Теорема 1.5.3. ([27], с. 318). *Пусть краевые условия задачи (1.5.1)-(1.5.9) регулярны. Тогда оператор D может быть представлен в одной из следующих форм*

$$\begin{aligned} 1.D &= c(1-R), \\ 2.D &= cA^{-\frac{1}{2}}(I-R), \\ 3.D &= cA^{-\frac{1}{2}}(I-R), \end{aligned} \tag{1.5.15}$$

где R–ограниченный оператор в каждом случае свой, а c– константы.

Если единица не является точкой спектра оператора R, то краевая задача (1.5.1)-(1.5.9) равномерно корректна на отрезке $[0,T]$. Все обобщенные решения задачи являются обобщенными решениями уравнения (1.5.1).

Теорема 1.5.4. *В условиях теоремы 1.5.3. обобщенное решение будет ослабленным при любых f_1 и $f_2 \in E$ в случае 1) из (1.5.15). Для того чтобы оно было ослабленным в остальных случаях достаточно, чтобы $f_1, f_2 \in D(A^{\frac{1}{2}})$.*

Ограниченные на бесконечности решения.

Пусть $u(t)$–обобщенное решение уравнения (1.5.1), определенное на $[0,\infty)$. Предположим, что оно ограничено:

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|u(t)\| < \infty. \tag{1.5.16}$$

Тогда справедлива

Теорема 1.5.5. ([27], с. 324). *Для всякого $u_0 \in E$ существует единственное, ограниченное на полуоси $[0,\infty)$ обобщенное решение уравне-*

ния (1.5.1), удовлетворяющее начальному условию $u(0) = u_0$. Это решение задается формулой

$$u(t) = V(t)u_0, \tag{1.5.17}$$

где $V(t)$– полугруппа класса C_0, генератором которой является оператор $A^{\frac{1}{2}}$.

Таким образом из выше сказанного следует, что при подходе С.Г.Крейна к исследованию краевых задач для уравнения (1.5.1) необходимо существование операторов $A^{-\frac{1}{2}}$ и $A^{\frac{1}{2}}$, в терминах которых формулируются понятия ослабленного и обобщенного решения. При этом условие (1.2.13) влечет существование ограниченного обратного оператора A^{-1}.

Желание расширить класс корректных задач для уравнений вида (1.5.1) привело в [10] к введению понятия а-позитивных операторов.

Определение 1.5.7. Замкнутый линейный оператор A с плотной в E областью определения $D(A)$ называется *а-позитивным*, если для всех $n = 1, 2, ...$ числа $-\frac{\pi^2 n^2}{a^2}$ принадлежат резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A и выполняется неравенство

$$\|(A + (\frac{n\pi}{a})^2)^{-1}\| \leq \frac{a^2}{(n\pi)^2}.$$

Класс а-позитивных операторов является более широким, чем класс сильно позитивных операторов. В частности, он содержит операторы с неограниченным обратным A^{-1}. Вместе с тем этот класс согласуется с оператором заданным дифференциальным выражением $Lu = u''(t)$ и граничными условиями $u(0) = u(a) = 0$, в том смысле, что спектр$-((n\pi)/a)^2$ оператора L содержится в резольвентном множестве $\rho(A)$ оператора A и выполняется оценка $\|(A + ((n\pi)/a)^2)^{-1}\| \leq a^2/(n\pi)^2$. В связи с этим вводится понятие корректной задачи Дирихле

$$u(0) = \varphi, u(a) = \psi \tag{1.5.18}$$

для уравнения (1.5.1).

Определение 1.5.8. Задача Дирихле (1.5.1)-(1.5.18) называется корректной, если она однозначно разрешима для любых $\varphi, \psi \in D(A)$ и существует $c > 0$ такое, что для всех решений $u(t)$ справедливы неравенства

$$\| \int_0^a \sin \frac{nt\pi}{a} u(t)dt\| \leq \frac{c}{n}(\|\varphi\| + \|\psi)\|) \qquad (n = 0, 1, ...).$$

В [10] выясняется, что задача (1.5.1)-(1.5.18) корректна тогда и только тогда, когда оператор A является а-позитивным. При этом существует $c > 0$ такое, что для всякого решения этой задачи имеет место оценка

$$\sup_{t\in[0,a]} \|u(t)\| \leq c(\|u(0)\| + \|u(a)\|).$$

Задача Неймана

$$u''(t) = Au(t), \qquad t \in [0, a], \tag{1.5.19}$$

$$u'(0) = \varphi, \qquad u'(a) = \psi. \tag{1.5.20}$$

Требуется найти дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1.5.19) удовлетворяющее условиям (1.5.20) ($\varphi, \psi \in D(A)$).

Определение 1.5.9.Задача Неймана (1.5.19)-(1.5.20) называется *корректной*, если она однозначно разрешима для всех $\varphi, \psi \in D(A)$ и существует $c > 0$ такое, что для всех решений $u(t)$ справедливы неравенства

$$n^2\| \int_0^a \cos \frac{nt\pi}{a} u(t)dt\| \leq c(\|\varphi\| + \|\psi)\|).$$

Теорема 1.5.6.*Задача (1.5.19)-(1.5.20) корректно разрешима тогда и только тогда, когда при всех $n = 0, 1, ...$ точки $(-n^2\pi^2)/a^2 \in \rho(A)$ и выполняется оценка*

$$n^2\|(A + \frac{n^2\pi^2}{a^2}I)^{-1}\| < \infty.$$

Заметим, что если задача (1.5.19)-(1.5.20) корректно разрешима, то в силу ее линейности существуют линейные операторы (см. [27], стр. 309) $S(t, A)$ такие, что $S(0, A) = I, S(a, A) = 0$, $D(A) \subset D(S(t, A))$, и для любого $x \in D(A)$ $(d^2S(t, A)x)/dt^2 = AS(t, A)x, t \in [0, a]$. В таких обозначениях решением уравнения (1.5.19) с условиями $u'(0) = \varphi, u'(a) = \psi$ является функция $u(t) = S(t, A)\varphi + S(a - t, A)\psi$.

1.6 Об одном методе решения одномерных параболических уравнений (задачи Дирихле)

Пусть требуется найти функцию $u(x, t)$, является решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \tag{1.6.1}$$

в области $Q_T = [0, X] \times [0, T]$ с начальными и краевыми условиями

$$u(x, 0) = 0, u(0, t) = q(t), u(X, t) = 0. \tag{1.6.2}$$

Будем предполагать, что функции $f(x, t)$ и $q(t)$ таковы, что существует достаточно гладкое решение задачи (1.6.1), (1.6.2). Для построения разностной схемы разобьём исходную область Q_T прямоугольной сеткой с шагами $h = \frac{X}{M}$, $\tau = \frac{T}{N}$ соответственно по координатам x и t. Будем искать функцию u_m^n, определённую в узлах (m, n) сетки, которая является приближением решения задачи (1.6.1), (1.6.2). Заменим производные в (1.6.1)разностными отношениями. Производная $\frac{\partial u}{\partial t}$ в точке $(mh, n\tau)$ может быть заменена многими способами, например

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\tau}.$$

В зависимости от способа аппроксимации будут получаться различные разностные схемы. Вторую производную в этой точке заменим следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2}.$$

Подставляя эти соотношения вместо соответствующих производных в (1), получим:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} + f_m^n; m = 1, ..., M-1; n - 0, ..., N-1; \tag{1.6.3}$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} + f_m^n; m = 1, ..., M-1; n - 0, ..., N-1; \tag{1.6.4}$$

Кроме уравнения (1.6.1), необходимо аппроксимировать начальные и граничные условия. Положим

$$u_m^0 = 0, u_0^n = q(n\tau), u_M^n = 0. \tag{1.6.5}$$

Таким образом, уравнения (1.6.3), (1.6.5) и (1.6.4), (1.6.5) являются разностной аппроксимацией задачи для параболического уравнения (1.6.1), (1.6.2). Для оценки погрешности аппроксимации разностной схемы (1.6.3), (1.6.5). Для этого подставим в (1.6.3) точное решение дифференциальной задачи. Так как

$$\frac{u(x, n\tau + \tau) - u(x, n\tau)}{\tau} = \frac{\partial u(x, n\tau)}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x, n\tau + \theta)}{\partial t^2}, 0 \le \theta \le \tau,$$

$$\frac{u((m-1)h, t) - 2u(mh, t) + u((m+1)h, t)}{h^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 u(mh, t)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u(mh + \vartheta, t)}{\partial x^4}, 0 \le \theta \le h,$$

то

$$\frac{u(x, n\tau + \tau) - u(x, n\tau)}{\tau} - \frac{u((m-1)h, t) - 2u(mh, t) + u((m+1)h, t)}{h^2} -$$

$$-f(x,t) = \frac{\partial u(x,n\tau)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(mh,t)}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x,n\tau+\theta)}{\partial t^2} -$$
$$-\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u(mh+\vartheta,t)}{\partial x^4} - f(x,t) = O(h^2+\tau).$$

Аналогично устанавливается, что порядок погрешности аппроксимации схемой (1.6.4), (1.6.5) задачи (1.6.1), (1.6.2) также равен $O(h^2+\tau)$. Из формулы (1.6.3) следует соотношение

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\tau}{h^2}(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \tau f_m^n. \tag{1.6.6}$$

В силу того что значения u_m^0 известны, из (1.6.6) можно найти значения $u_m^1 (m = 1, \ldots, M-1)$ и так далее. Поэтому если значения u_m^n известны, то u_m^{n+1}находятся с помощью явных формул (1.6.6). Поэтому схема (1.6.3), (1.6.5) называется явной. Преобразуя (1.6.4), имеем

$$-\frac{\tau}{h^2}u_{m-1}^{n+1} + (1+\frac{2\tau}{h^2})u_{m+1}^{n+1} - \frac{\tau}{h^2}u_{m+1}^{n+1} = u_m^n + \tau f_m^n, (m = 1, ..., M-1);$$
$$u_0^{n+1} = q^{n+1} \equiv q((n+1)\tau), u_M^{n+1} = 0. \tag{1.6.7}$$

При известных $u_m^n, (m = 1, \ldots, M-1)$, соотношения (1.6.7) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $u_m^{n+1}, (m = 1, \ldots, M-1)$. Поэтому схема (1.6.4), (1.6.5) называется неявной. Система уравнений (1.6.7) относительно вектора неизвестных $v = \{u_1^{n+1}, \ldots, u_{M-1}^{n+1}\}$ может быть записана в виде $Av = b$, где матрица A - является трёх диагональной. Такая система линейных алгебраических уравнений может быть решена, например, методом прогонки. Проведём исследование устойчивости этих разностных схем. Обозначим $u^n = (u_0^n, , \ldots, u_M^n)$, $f^n = (f_1^n, \ldots, f_{M-1}^n)$. Введём нормы

$$\|u^n\| = \max_{0\le m\le M} |u_m^n|, \|f^n\| = \max_{0\le m\le M-1} |f_m^n|.$$

Будем называть разностную схему устойчивой в сеточной норме пространства , если существует постоянная c_1, не зависящая от шагов сетки h и τ, такая, что имеет место оценка

$$\max_{0\le n\le N}\|u^n\| \le c_1(\max_{0\le n\le N}\|f^n\| + \max_{0\le k\le N}|q^k|).$$

Теорема 1.6.1. *Пусть $\tau \le \frac{h^2}{2}$. Тогда разностная схема (1.6.3), (1.6.5) устойчива в сеточной норме пространства .* Разностные схемы, которые обладают устойчивостью при определенных соотношениях между шагами сетки, называются условно устойчивыми. Соответственно если схема устойчива при любых соотношениях между шагами сетки, то она называется безусловно устойчивой.

Теорема 1.6.2. *При любых h и τ разностная схема (1.6.4), (1.6.5) устойчива в сеточной норме пространства .*

Глава 2

О корректной разрешимости задач фильтрации

2.1 Необходимые факты из общей теории при исследовании модели В.С.Голубева

В банаховом пространстве E рассматривается уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} = Au(x), \qquad x \in [0, \pi], \tag{2.1.1}$$

где A- вообще говоря, неограниченный в E оператор с областью определения $D(A)$ такой, что оператор $-A$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $U(t, -A)$,удовлетворяющей оценке

$$\|U(t, -A)\| \leq Me^{-\omega t}, \qquad \omega \geq 0 \tag{2.1.2}$$

Определение 2.1.1. Решением уравнения (2.1.1) будем называть функцию $u(x)$ со значениями в $D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую (2.1.1) на отрезке $[0, l]$.

Определение 2.1.2. Задача Дирихле для уравнения (2.1.1)

$$u(0) = \varphi_1, u(l) = \psi_1, \tag{2.1.3}$$

называется корректной, если она однозначно разрешима для любых $\varphi_1, \psi_1 \in D(A)$ и существует $c_1 > 0$ такое, что для всех решений (2.1.1) справедливо неравенство

$$\sup_{x\in[0,l]} \|u(x)\|_E \leq c_1(\|\varphi_1\|_E + \|\psi_1\|_E). \tag{2.1.4}$$

Определение 2.1.3.Задача Неймана для уравнения (2.1.1)

$$u'(0) = \varphi_2, u'(l) = \psi_2, \tag{2.1.5}$$

называется корректной, если она однозначно разрешима для всех $\varphi_2, \psi_2 \in D(A)$ и существует $c_2 > 0$ такое, что для всех решений (2.1.1) справедливо неравенство случае

$$\sup_{x\in[0,l]} \|u(x)\|_E \leq c_2(\|\varphi_2\|_E + \|\psi_2\|_E). \tag{2.1.6}$$

В случае $l = \infty$ отыскиваются решения $u(x)$ в предположении ограниченности

$$\sup_{x\in[0,\infty)} \|u(x)\| < \infty \tag{2.1.7}$$

и удовлетворяющие условиям

$$u(0) = \varphi_3 \tag{2.1.8}$$

задача Дирихле;

$$u'(0) = \varphi_4 \tag{2.1.9}$$

задача Неймана.

И оценкам (2.1.4) и (2.1.6) соответствуют оценки

$$\sup_{x\in[0,l]} \|u(x)\|_E \leq c_1\|\varphi_3\|, \tag{2.1.10}$$

$$\sup_{x\in[0,l]} \|u(x)\|_E \leq c_2\|\varphi_4\|. \tag{2.1.11}$$

Отметим, что условие (2.1.2) обеспечивает корректную разрешимость рассматриваемых задач и справедливость следующих результатов. Для простоты изложения будем считать $l = \pi$. Из результатов А.В.Князюка [19] следует корректная разрешимость задачи Дирихле (2.1.1)-(2.1.3) и для ее решения получено представление

$$u(x) = F(x)\varphi_1 + F(\pi - x)\psi_1, \tag{2.1.12}$$

где

$$F(x)\varphi = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cdot n(n^2 + A)^{-1}\varphi. \tag{2.1.13}$$

Если $\varphi_1 \in D(A)$, то

$$F(x)\varphi = (1 - \frac{x}{\pi})\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}(n^2 + A)^{-1}A\varphi. \tag{2.1.14}$$

Корректность задачи Неймана (1)-(4) показана М.Небольсиной в [39], при этом решение имеет вид

$$u(x) = S(x)\varphi_2 + S(\pi - x)\psi_2, \tag{2.1.15}$$

где

$$S(x)\varphi = \frac{1}{\pi}[A^{-1}\varphi + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx(n^2 + A)^{-1}\varphi]. \tag{2.1.16}$$

Заметим, что из (2.1.13) и (2.1.16) следует соотношение

$$S'(x)\varphi = F(x)\varphi, \tag{2.1.17}$$

Если $\varphi \in D(A)$, то

$$F'(x)\varphi = -S(x)A\varphi. \tag{2.1.18}$$

Эти решения можно выразить и через полугруппу $U(t, -A)$, если воспользоваться формулой, связывающую резольвенту $R(x)$ и полугруппу генератора $-A$.

$$(n^2 + A)^{-1}\varphi = R(n^2, -A) = \int_0^{\infty} e^{-n^2 S}U(s, -A)\varphi ds. \tag{2.1.19}$$

Пользуясь (2.1.19) в (2.1.13) и (2.1.16) и, меняя порядки суммирования и интегрирования, получаем представления

$$F(x)\varphi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\Theta}{dx}(\frac{x}{2\pi}, \frac{is}{\pi})U(s, -A)\varphi ds, \tag{2.1.20}$$

$$S(x)\varphi = \frac{1}{\pi}A^{-1}\varphi + \int_0^\infty [\Theta(\frac{x}{2\pi}, \frac{is}{\pi}) - 1]U(s, -A)\varphi ds, \tag{2.1.21}$$

где $\Theta(z, i\mu)$- Θ-функция Якоби, вида

$$\Theta(z, i\mu) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} exp(-\pi n^2\mu)\cos(2\pi nz)$$

см.[30] с.13.

Корректная разрешимость задачи (2.1.1)-(2.1.8) показана С.Г.Крейном в [27] с.324, при этом ее решение имеет вид

$$u(x)\varphi_3 = U(x, -(-A)^{\frac{1}{2}})\varphi_3. \tag{2.1.22}$$

Наконец корректная разрешимость задачи Неймана установлена Д.В.Костиным в [26], и решение имеет вид

$$u(x)\varphi_4 = -\int_x^\infty U(\tau, -(-A)^{\frac{1}{2}})\varphi_4 d\tau. \tag{2.1.23}$$

2.2 Постановка задач в рамках общей теории (случай $x \in R^+$)

Для применения подхода, изложенного в §2.1, запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{d^2p(x)}{dx^2} = Ap(x), \qquad x \in [0, \infty) \tag{2.2.1}$$

где оператор A задается дифференциальным выражением $\frac{1}{a}L_t$ и областью определения

$$D(A) = \{u \in E, \frac{du}{dt} \in E\}, \tag{2.2.2}$$

где E функциональные пространства.

При этом условия

$$u(t,0)=\varphi_1(t), u(t,l)=\psi_1(t)$$

задача Дирихле;

$$u'_x(t,0)=\varphi_2(t), u'_x(t,l)=\psi_2(t)$$

задача Неймана

при $l=\pi$ имеют вид

$$p(0)=\varphi_1, p(\pi)=\psi_1 \tag{2.2.3}$$

в случае задачи Дирихле;

$$\frac{dp(x)}{dx}|_{x=0}=\varphi_2, \frac{dp(x)}{dx}|_{x=\pi}=\psi_2, \tag{2.2.4}$$

в случае задачи Неймана.

Если $l=\infty$, то граничные условия принимают вид

$$p(0)=\varphi_3, \qquad \lim_{x\to\infty}\|p(x)\|=0, \tag{2.2.5}$$

и

$$p'(0)=\varphi_4, \qquad \lim_{x\to\infty}\|p(x)\|=0. \tag{2.2.6}$$

Таким образом, для установления корректной разрешимости исследуемых задач необходимо построить полугруппу $U(x,-A)$ и получить для нее оценку (2.1.2).

2.3 Построение полугруппы $U(t,-A)$ (случай $x\in(0,\infty)$)

Оператор A представим в виде суммы $A=A_1+A_2$, где оператор A_1 задается дифференциальным выражением

$$l_1u(t)=\frac{\nu}{a}\frac{du(t)}{dt}+\frac{1-\nu}{a}u(t) \tag{2.3.1}$$

и областью определения $D(A_1) = \{u \in C_{[0,\infty)}, l_1 u \in C_{[0,\infty)}, u(0) = 0\}$. Оператор A_2 зададим интегральным оператором

$$A_2 u(t) = -\frac{1-\nu}{a}\gamma^2 \int_0^t e^{\gamma(s-t)} u(s) ds. \tag{2.3.2}$$

Нетрудно видеть, что оператор A_2 ограничен в $C_{[0,\infty)}$ в силу очевидной оценки

$$\|A_2 u\| \leq \frac{1-\nu}{a}\gamma \|u\|. \tag{2.3.3}$$

Более того, например, в случае $u(t) \equiv 1$ неравенство (2.3.3) переходит в равенство, так как

$$-A_2 u(t) = \varphi(t) = \frac{1-\nu}{a}\gamma^2 \int_0^t e^{\gamma(s-t)} ds = \frac{1-\nu}{a}\gamma(1 - e^{-\gamma t}).$$

Откуда, очевидно, следует

$$\| - A_2 u\| = \|\varphi\| = \frac{1-\nu}{a}\gamma \|u\| = \frac{1-\nu}{a}\gamma. \tag{2.3.4}$$

Таким образом установлено равенство

$$\| - A_2 u\| = \frac{1-\nu}{a}\gamma. \tag{2.3.5}$$

Заметим, что операторы A_1 и A_2 коммутируют на $D(A_1)$. Это следует из легко проверяемого равенства

$$\int_0^t e^{\gamma(s-t)} u'(s) ds = \frac{d}{dt}\int_0^t e^{\gamma(s-t)} u(s) ds.$$

Полугруппа $U(x, -A_1)$ с генератором A_1 имеет вид

$$U(x, -A_1)u(t) = e^{-\frac{1-\nu}{a}x} \begin{cases} u(t - \frac{\nu}{a}x), & \frac{\nu}{a}x \leq t; \\ 0, & \frac{\nu}{a}x > t \end{cases}$$

Отсюда следует оценка

$$\|U(x, -A_1)\| \leq e^{-\frac{1-\nu}{a}x}.$$

Также как и в случае доказательства (2.3.5), пользуясь функцией $u(t) \equiv 1$, доказывается равенство

$$\|U(x, -A_1)\| = e^{-\frac{(1-\nu)}{a}x}. \tag{2.3.6}$$

Далее для получения представления полугруппы $U(x, -A_2)$ воспользуемся рядом

$$U(x, -A_2)u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}(-A_2)^n u(t), \tag{2.3.7}$$

где

$$(-A_2)^n u(t) = \begin{cases} \frac{(1-\nu)^n \gamma^{2n}}{a^n (n-1)!} \int_0^t e^{-\gamma s} s^{n-1} u(t-s) ds, & n = 1, 2, ...; \\ I, & n = 0. \end{cases} \tag{2.3.8}$$

I-тождественный оператор.

Это дает оценку

$$\|A_2^n u\| \leq \frac{(1-\nu)^n \gamma^{2n}}{a^n (n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\gamma s} s^{n-1} ds \|u\| = (\frac{1-\nu}{a})^n \gamma^n \|u\|. \tag{2.3.9}$$

Оценивая полугруппу (2.3.7), используя (2.3.8), получаем оценку

$$\|U(x, -A_2)u\| \leq \|u\| \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1-\nu}{a})^n \frac{\gamma^n x^n}{n!} = e^{\frac{(1-\nu)\gamma}{a}x} \|u\|. \tag{2.3.10}$$

Теперь нетрудно видеть, что из (2.3.6) и (2.3.10) следует неравенство

$$\|U(x, -A)\| \leq \|U(x, -A_1)\| \|U(x, -A_2)\| \leq exp[-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}]. \tag{2.3.11}$$

Далее, пользуясь (2.3.8) в (2.3.7), получаем представление

$$U(x, -A_2)u(t) = u(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\nu)^n \gamma^{2n} x^n}{a^n (n-1)! n!} \int_0^t e^{-\gamma s} s^{n-1} u(t-s) ds =$$

$$= u(t) + \int_0^t (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\nu)^n \gamma^{2n} x^n s^{n-1}}{a^n (n-1)! n!}) e^{-\gamma s} u(t-s) ds =$$

$$= u(t) + x\frac{1-\nu}{a}\gamma^2 \int_0^t e^{-\gamma s} I_1(2\gamma\sqrt{\frac{1-\nu}{a}xs})u(t-s)ds. \qquad (2.3.12)$$

Здесь мы воспользовались соответствующим представлением функции Бесселя $I_1(z)$ первого рода (см [30] с.642).

Теперь, пользуясь (2.3.5) и (2.3.12), получаем вид полугруппы $U(t,-A)$

$$U(x,-A)u(t) = U(x,-A_1)U(x,-A_2)u(t) =$$

$$= e^{-\frac{1-\nu}{a}x} \begin{cases} u(t-\frac{\nu}{a}x) + (1-\frac{\nu}{a})\gamma^2 x \times & s \le t - \frac{\nu}{a}x; \\ \times \int_0^{t-\frac{\nu}{a}x} I_1(2\gamma\sqrt{\frac{1-\nu}{a}xs})e^{-\gamma s}u(t-\frac{\nu}{a}x-s)ds, & \\ 0, & t-\frac{\nu}{a}x < s. \end{cases} \qquad (2.3.13)$$

Покажем, что для $u(t) \equiv 1$ неравенство (2.3.10) переходит в равенство.

Действительно, переходя к пределу в (2.3.12) при $t \to \infty$, получаем

$$\lim_{t\to\infty} |U(x,-A_2)u(t)| = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{(1-\nu)\gamma^2 x}{a}]^n \frac{1}{n!\gamma^n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [\frac{(1-\nu)\gamma x}{a}]^n \frac{1}{n!} = e^{\frac{(1-\nu)\gamma x}{a}}. \qquad (2.3.14)$$

Таким образом из (2.3.11) и (2.3.12) получаем равенства

$$\|U(x,-A_2)\| = e^{\frac{(1-\nu)\gamma}{a}x} \qquad (2.3.15)$$

и

$$\lim_{t\to\infty} [1 + \frac{(1-\nu)}{a}x\gamma^2 \int_0^t e^{-\gamma s} I_1(2\gamma\sqrt{\frac{1-\nu}{a}xs})ds = e^{\frac{(1-\nu)}{a}\gamma x}. \qquad (2.3.16)$$

Далее, пользуясь (2.3.14) в (2.3.13) для $u(t) \equiv 1$, получаем значение нормы для $U(t,-A)$

$$\|U(x,A)u(t)\| = \lim_{t\to\infty} |U(x,A)u(t)| = e^{-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}}. \qquad (2.3.17)$$

2.4 Построение оператора $\sqrt{A}$

Таким образом, для получения решений задач

$$a\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)p(t,x) -$$

$$-(1-\nu)\gamma^2\int_0^t e^{\gamma(s-t)}p(s,x)ds = \mathrm{L}_t p(t,x)$$

$$p(t,0) = q(t),\ \lim_{x\to\infty} p(t,x) = 0$$

и

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}|_{x=0} = \varphi(t)$$

необходимо построить оператор $A^{\frac{1}{2}}$ и полугруппу $U(x,-\sqrt{A})$, имеющую, в силу [17], представление

$$U(x,-\sqrt{A})q = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\exp(-\frac{x^2}{4s})}{s^{\frac{3}{2}}}U(s,-A)qds =$$

$$= -\frac{A}{\pi}\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}U(s,-A)qds, \qquad (2.4.1)$$

где $U(x,-A)$-сильно непрерывная полугруппа с генератором $-A$.

Используя (2.3.9) в

$$\frac{dp}{dx}|_{x=0} = -\sqrt{A}q = -AA^{-\frac{1}{2}}q$$

получаем представление для градиента решения задачи

$$a\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)p(t,x) -$$

$$-(1-\nu)\gamma^2\int_0^t e^{\gamma(s-t)}p(s,x)ds = \mathrm{L}_t p(t,x)$$

$$p(t,0) = q(t),\ \lim_{x\to\infty} p(t,x) = 0$$

$$\varphi(t) = A^{\frac{1}{2}}q(t) = \frac{1}{\pi}A\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}U(s,-A)q(t)ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}U(s,-A)Aq(t)ds. \qquad (2.4.2)$$

В последнем равенстве учтено условие $q(0) = 0$. Из (2.4.2), (2.3.10) и (2.3.6), в частности для $q \in \mathrm{D}(A)$ следует оценка

$$\|\varphi\| \le \frac{1}{\pi}\|Aq\|\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}s}ds =$$

$$= (\frac{a}{\pi(1-\nu)(1-\gamma)})^{\frac{1}{2}}\|Aq\|. \qquad (2.4.3)$$

Справедливо следующее утверждение

Теорема 2.4.1. *Задача*

$$a\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)p(t,x) -$$

$$-(1-\nu)\gamma^2\int_0^t e^{\gamma(s-t)}p(s,x)ds = \mathrm{L}_t p(t,x)$$

$$p(t,0) = q(t), \lim_{x\to\infty} p(t,x) = 0$$

имеет единственное решение, которое представимо в виде

$$p(t,x) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4s}}U(s,-A)q(t)ds. \qquad (2.4.4)$$

Доказательство следует из теоремы С.Г.Крейна ([27] с.324) о представлении обобщенного решения задачи

$$\frac{d^2p(x)}{dx^2} = Ap(x), x > 0$$

$$D(A) = \{u \in C_{[0,\infty)}, \frac{du}{dt} \in C_{[0,\infty)}, u(0) = 0\}$$

в виде

$$p(x) = U(x,(-A)^{\frac{1}{2}})q, \qquad (2.4.5)$$

где полугруппа $U(x,(-A)^{\frac{1}{2}})$ имеет вид

$$U(x,(-A)^{\frac{1}{2}})q = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4s}}U(s,-A)q(t)ds.$$

(см.[17] с.358). Кроме того для решения задачи

$$a\frac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)p(t,x) -$$

$$-(1-\nu)\gamma^2\int_0^t e^{\gamma(s-t)}p(s,x)ds = \mathrm{L}_t p(t,x)$$

$$p(t,0) = q(t),\ \lim_{x\to\infty} p(t,x) = 0$$

выполняется следующая оценка на порядок его убывания

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |p(t,x)| \le e^{[-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}]^{\frac{1}{2}}x}\|q\|. \tag{2.4.6}$$

Доказательство следует из оценки на полугруппу $\|U(x,-A^\alpha)\| \le e^{-\omega^\alpha x}$, ($\alpha \in (0,1)$), где $\omega \ge$-тип полугруппы, приведенной , например, в [21].

2.5 Вычисление характеристик потока на границе

Так как, исходя из изложенной выше общей теории, оценка (2.3.11) обеспечивает равномерную корректность задач (2.2.1)-(2.2.6), то представления решений (2.1.13)-(2.1.16), (2.1.22), (2.1.23) позволяют ответить на следующие вопросы, связанные с определением потока вещества на границе области:

А) Нахождение градиента давления у границы области по известному закону изменения давления на границе.

То есть вычисление значений

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}|_{x=0} = q_1(t), \qquad \frac{\partial p(t,x)}{\partial x}|_{x=\pi} = q_2(t), \tag{2.5.1}$$

в случае задачи (2.2.1)-(2.2.3), и

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}|_{x=0} = q_3(t), \tag{2.5.2}$$

в случае задачи (2.2.1)-(2.2.5).

B) Определение давления на границе области по заданному градиенту.

То есть вычисление значений:

$$p(t,0) = g_1(t), \qquad p(t,\pi) = g_2(t), \tag{2.5.3}$$

в случае задачи (2.2.1)-(2.2.4), и

$$p(t,0) = g_3(t), \tag{2.5.4}$$

в случае задачи (2.2.1)-(2.2.6).

Имея в виду соотношение $A = L_t$, и полугруппу $U(x,A) = U(x,L_t)$ вида (2.3.13), представления (2.1.15) и (2.1.16) позволяют дать следующие ответы в этих задачах.

A) Из (2.1.18) следуют равенства

$$q_1(t) = -L_t[S(0)\varphi_1(t) + S(\pi)\psi_1(t)]; \tag{2.5.5}$$

$$q_2(t) = -L_t[S(\pi)\varphi_1(t) + S(0)\psi_1(t)]; \tag{2.5.6}$$

Из (2.1.22) получаем

$$q_3(t) = (-L_t)^{\frac{1}{2}}\varphi_3(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau^{-\frac{1}{2}} U(\tau, L_t) L_t \varphi_3(t) d\tau \tag{2.5.7}$$

B) Равенства (2.1.15) и (2.1.23) дают соотношения

$$g_1(t) = S(0)\varphi_2(t) + S(\pi)\psi_2(t); \tag{2.5.8}$$

$$g_2(t) = S(\pi)\varphi_2(t) + S(0)\psi_2(t); \tag{2.5.9}$$

$$g_4(t) = -\int_0^\infty U(\tau, -(L_t)^{\frac{1}{2}})\varphi_4(t) d\tau = -L_t^{-\frac{1}{2}}\varphi(t). \tag{2.5.10}$$

Из полученных соотношений заключаем, что в силу оценок

$$\|S(0)\varphi\| \le \frac{1}{\pi}[\|A^{-1}\| + 2\sum_{n=1}^{\infty}\|(n^2+A)^{-1}\|]\|\varphi\| =$$

$$= \frac{1}{\pi}[\frac{1}{\omega} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\omega}]\|\varphi\| = \frac{ch\sqrt{\omega}\pi}{sh\sqrt{\omega}\pi}\|\varphi\| \qquad (2.5.11)$$

$$\|\int_0^{\infty} U(\tau, -L_t)^{\frac{1}{2}}\varphi d\tau\| \leq \int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{2}}\tau}d\tau\|\varphi\| = \omega^{-\frac{1}{2}}\|\varphi\| \qquad (2.5.12)$$

задачи (2.5.3)-(2.5.4) равномерно корректны в пространствах $C_{[0,\infty)}$, и их численная реализация носит стандартный характер.

Решение задач (2.5.1)-(2.5.2) выражается через неограниченный оператор L_t, и вследствие этого их численная реализация осуществляется с помощью соответствующих регуляризирующих методов. Но из разложения $L_t = \nu\frac{\partial}{\partial t} + L_0$, где L_0-неограниченный оператор, следует, что регуляризирующий алгоритм относится только к вычислению производной $\frac{\partial}{\partial t}$, что также реализуется по стандартной схеме ([5] с. 80-81).

Таким образом, из представлений (2.5.5)-(2.5.7) следует, что при решении задачи Дирихле, в частности задачи Ю.И.Бабенко, сначала нужно получить решение равномерно корректной задачи Неймана, а затем применить стандартный алгоритм вычисления производной.

Вычисление функции $\varphi(t) = A^{\frac{1}{2}}q(t)$, в соответствии с (2.4.2), сводится к последовательности следующих шагов:

1. Вычисление функции

$$Aq(t) = \frac{\nu}{a}q'(t) - \frac{1-\nu}{a}q(t) + A_2q(t).$$

Это равенство показывает, что первое слагаемое содержит некорректную по Ж.Адамару операцию в силу неограниченности оператора дифференцирования. Это приводит к согласованию шага интерполирования h с погрешностью ε для исходных данных q. Так, согласно [5] с.92, в случае определения производной $q'(t_0) \approx \frac{q(t_0+h)-q(t_0)}{h}$ должно выполняться соотношение $h = 2\sqrt{M\varepsilon}$, где $M = \max_{\xi\in R_+}|q''(\xi)|$.

2. Заключительная вычислительная операция функции $\varphi(t) = A^{-\frac{1}{2}}Aq(t)$ является корректной, в силу ограниченности оператора $A^{-\frac{1}{2}}$, следующего из представления [27] с.150

$$A^{-\frac{1}{2}}u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}U(s,-A)uds$$

и оценки

$$\|A^{-\frac{1}{2}}u\| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}\|U(s,-A)u\|ds \leq$$

$$\leq \frac{\|u\|}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}exp[-\frac{(1-\nu)(1-\gamma)}{a}s]ds = \frac{a}{(1-\nu)(1-\gamma)}\|u\|.$$

Глава 3

Об автоматическом регулировании течения вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде

3.1 Выбор математической модели

Как сказано выше, входной импульс изменения давления на входе жидкость-проводящей магистрали порождает в этой магистрали течение жидкости в форме изолированной волны. При этом момент формирования последующего входного импульса подобран так, что порожденное им волновое течение не взаимодействует с течением, порожденным как предшествующим, так и последующим импульсами. Поэтому при рассмотрении математической модели достаточно анализировать процессы, порожденные одиночным импульсом. Предположим, что порожденная импульсом волна полностью затухает в магистрали не вызывая отраженных течений. Поэтому для дальнейшего анализа можно использовать модель течения жидкости в полубесконечной магистрали. В математической литературе [2], [44] процесс нестационарного течения вязкой сжимаемой жидкости в неограниченной справа магистрали, имеющую пористую структуру с

равномерно распределёнными проточными и застойными зонами, при заданном изменении давления $u(t,0) = q(t)$ на границе - описывается уравнением:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = \frac{\nu}{a}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{(1-\nu)\gamma}{a}u(t,x) - (1-\nu)\gamma^2 \int_0^t e^{\gamma(s-t)}u(s,x)ds; \tag{3.1.1}$$

в области $0 \leq x \leq \infty$, $0 \leq t \leq \infty$, с начально-краевыми условиями $u(t,0) = q(t)$; $u(0,x) = \lim_{x\to\infty} u(t,x) = 0$. Параметры, участвующие в уравнении (3.1.1) имеют следующий физический смысл: $0 < \nu \leq 1$ -доля объёма проточных зон, γ - константа, характеризующий обмен массами жидкости между проточными и застойными зонами, a- коэффициент проводимости. Вязкость жидкости учитывается коэффициентами a и γ. Для того чтобы управляющая вычислительная машина могла прогнозировать поведение жидкости в магистрали, в составе её программного обеспечения должна присутствовать подсистема моделирования движения жидкости на базе уравнения (3.1.1).Значения давления жидкости в магистрали может быть приближенно вычислено с использованием алгоритмов базирующихся на использовании разностных схем. Удовлетворительная точность вычислений с их помощью достигается при правильном выборе значений параметров $\triangle t$ и $\triangle x$, использованными при замене производных конечными разностями. При рассмотрении задачи фильтрации в работе [2] были получены точные формулы, представляющие функцию $\psi(t) = \lim_{x\to 0} \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$.Эти формулы можно использовать в качестве ориентира при подборе значений параметров разностных схем $\triangle t$ и $\triangle x$.

3.2 Анализ возможности использования неявной разностной схемы

Графическое представление вычислительного графа, связанное с неявной разностной схемой, приведено на рисунке 5. Этот граф связывает те значения функции u на дискретной сетке, которые используются при вычислении значения $u_{i,j}$.Однонаправленная стрелка показывает, что в процессе вычислений значения этих параметров используются в качестве аргумента. Двунаправленная стрелка показывает, что значения этих параметров связаны со значением $u_{i,j}$ уравнением. Переменная $u_{i,j}$ представляет приближенное значение решения уравнения при значении аргумента $t = i\triangle t$, $x = j\triangle x$. Светлым кружком, на рисунке, обведены уже вычисленные значения функции u $(i\triangle t, j\triangle x)$. Тёмным кружком обведены те значения функции, которые будут вычислены в результате решения системы уравнений. Жирной линией нарисовано стандартное графическое представление вычислительного графа для неявной разностной схемы параболического уравнения, а значения функции, лежащие на тонкой линии, участвуют в квадратурной формуле для вычисления интеграла.

Вычисление приближённых значений для решения уравнения (3.1.1) в узлах дискретной сетки проведём в два этапа. На первом этапе область построения решения представим разделенной на слои по переменной t с шагом $\triangle t$. Для вычисления приближенных значений решения уравнения (3.1.1) на i-ом слое заменим производную по t разностным выражением:

$$\frac{d^2u_i(x)}{dx^2} = \frac{\nu}{a}\frac{u_i(x) - u_{i-1}(x)}{\triangle t} + \frac{(1-\nu)\gamma}{a}u_{i-1}(x) -$$

$$-(1-\nu)\gamma^2 \sum_{k=1}^{i} e^{\gamma(k-i)\triangle t} u_{k-1}(x)\triangle t.$$

В результате задача получения приближённого решения уравнения (3.1.1) сводится к решению серии краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2u_i(x)}{dx^2} - \frac{\nu}{a\triangle t}u_i(x) = (\frac{(1-\nu)\gamma}{a} - \frac{\nu}{a\triangle t})u_{i-1}(x) -$$

$$-(1-\nu)\gamma^2 \sum_{k=1}^{i} e^{\gamma(k-i)\triangle t} u_{k-1}(x)\triangle t \qquad (3.2.1)$$

с краевыми условиями: $u_i(0) = q(i\triangle t)$ и $\lim_{x\to\infty} u_i(x) = 0$. Решение краевой задачи можно аппроксимировать решением краевой задачи на конечном отрезке $[0, X]$ с краевыми условиями $u_i(0) = q(i\triangle t)$ и $u_i(X) = 0$. На втором этапе заменим правую часть в уравнении (3.2.1) кусочно-постоянной функцией. Функция $u_0(x)$ совпадает с начальным условием для уравнения (3.1.1) и, по условию, является кусочно-постоянной функцией. Решение $u_i(x)$ краевой задачи для уравнения (3.2.1) будем склеивать из решений краевых задач с постоянной правой частью на отрезках $[j\triangle x, (j+1)\triangle x]$. Затем заменим полученное решение $u_i(x)$ кусочно-постоянной функцией со значением $u_i(j\triangle x)$ на отрезке $[j\triangle x, (j+1)\triangle x]$.

3.3 Численное решение граничной задачи

Рассмотрим алгоритм построения решения краевой задачи (3.2.1) с постоянной на отрезках $[j\triangle x, (j+1)\triangle x]$ правой частью вычисляемой в предположении, что $u_{i-k}(x)$, $(0 < k \leq i)$ являются кусочно-постоянными функциями. Предположим, что на отрезках, определённых значениями индекса в промежутке $0 \leq j \leq n$ решение уже построено. Распространим

решение на промежуток $[n\triangle x, (n+1)\triangle x]$. Для этого построим решение краевой задачи полученного из уравнения (3.2.1) в предположениях: задача рассматривается на отрезке $[n\triangle x, X]$; функции $u_{i-k}(x)$, $(0 < k \leq i)$ на этом отрезке постоянны и равны $u_{i-k}(n\triangle x)$; краевые условия $u_i(n\triangle x)$ на левом конце интервала и 0 на правом. Введём следующие соглашения и обозначения: пусть $X = m\triangle x$,

$$\beta^2 = \frac{\nu}{a\triangle t}, f = (\frac{(1-\nu)\gamma}{a} - \frac{\nu}{a\triangle t})u_{i-1}(n\triangle x) -$$

$$-(1-\nu)\gamma^2 \sum_{k=1}^{i} e^{\gamma(k-i)\triangle t} u_{k-1}(n\triangle x)\triangle t, g = \frac{f}{\beta^2}. \qquad (3.3.1)$$

В этих обозначениях краевая задача может быть сформулирована следующим образом: найти решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - \beta^2 u(x) = f$$

на отрезке $[n\triangle x, m\triangle x]$, с краевыми условиями $u(n\triangle x) = v, u(m\triangle x) = 0$. Общее решение уравнения с постоянными коэффициентами и постоянной правой частью представляется функцией:

$$C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} - \frac{f}{\beta^2}.$$

Введём обозначения: $p = e^{\beta\triangle x}$, тогда значение общего решения в точке $m\triangle x$ будет равно $C_1 + C_2 - g$ и по условию равно 0. Отсюда получаем: $C_1 p^m + C_2 p^{-m} - g = 0$ или $C_1 = p^{-m}(g - C_2 p^{-m})$. Тогда общее решение уравнения, удовлетворяющее краевому условию в правом конце отрезка, задаётся функцией:

$$p^{-m}(g - C_2 p^{-m})e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} - g$$

или

$$C_2(e^{-\beta x} - p^{-2m}e^{\beta x}) - g(1 - p^{-m}e^{\beta x}),$$

которая при $x = n\triangle x$ принимает значение

$$C_2(p^{-n} - p^{-2m}p^n) - g(1 - p^{-m}p^n) = v.$$

Отсюда получим:

$$C_2 = \frac{v}{(p^{-n} - p^{-2m}p^n)} + \frac{g(1 - p^{-m}p^n)}{(p^{-n} - p^{-2m}p^n)}.$$

Таким образом, решение краевой задачи задаётся функцией:

$$\frac{v(e^{-\beta x} - p^{-2m}e^{\beta x})}{(p^{-n} - p^{-2m}p^n)} + \frac{g(1 - p^{-m}p^n)(e^{-\beta x} - p^{-2m}e^{\beta x})}{(p^{-n} - p^{-2m}p^n)} - g(1 - p^{-m}e^{\beta x}). \tag{3.3.2}$$

точке $x = (n+1)\triangle x$ значение этой функции равно:

$$\frac{p^{-(n+1)} - p^{-2m}p^{(n+1)})}{(p^{-n} - p^{-2m}p^n)} + \frac{g(1 - p^{-m}p^n)(p^{-(n+1)} - p^{-2m}p^{(n+1)})}{(p^{-n} - p^{-2m}p^n)} - g(1 - p^{-m}p^{(n+1)}). \tag{3.3.3}$$

На интервале $[(n+1)\triangle x, (n+2)\triangle x]$ кусочно-постоянная функция g принимает новое значение, которое должно быть пересчитано по формуле (3.3.1).Новое значение параметра v, вычисленное по формуле (5), определяет граничные условия для решения краевой задачи на отрезке $[(n+1)\triangle x, m\triangle x]$. Используя формулу (3.3.2) распространим решение краевой задачи на отрезок $[(n+1)\triangle x, m\triangle x]$. Таким образом, формула (3.3.3) является рекуррентной формулой для получения значений $u_{i,j}$ на i слое. Переходя от слоя к слою (от i -го к $(i+1)$-ому), построим решение во всей области.

3.4 Результаты расчетов и рекомендации

С использованием рекуррентной формулы (3.3.1) было проведено построение приближённых решений уравнения (3.1.1). В работе [2] было

получено точное представление для оператора $\lim_{x\to 0}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, действующего на граничных функциях $q(t)$. Сравнение действия этого оператора на граничную функцию $q(t)$ с его приближённым представлением на дискретной сетке, вычисленным по формуле:

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{1}{\triangle x}[v-\frac{vp(p^{-1}-p^{-m})(p^{-1}+p^{-m})}{(1-p^{-m})(1+p^{-m})}+\frac{gp(p^{-1}-p^{-m})(1-p^{-1})}{(1+p^{-m})}]$$

или в преобразованном виде:

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{1}{\triangle x}[\frac{v[(1-p^{-1})-p^{-2m}(1-p)]}{(1-p^{-m})(1+p^{-m})}+\frac{gp(p^{-1}-p^{-m})(1-p^{-1})}{(1+p^{-m})}]=$$

$$=\sqrt{\frac{\nu}{a\triangle t}}\frac{q(i\triangle t)(1+e^{-2\beta X})}{(1-e^{-2\beta X})}+$$

$$+\sqrt{\frac{a\triangle t}{\nu}}[(\frac{(1-\nu)\gamma}{a}-\frac{\nu}{a\triangle t})q((i-1)\triangle t)-$$

$$-(1-\nu)\gamma^2\sum_{k=1}^{i}e^{\gamma(k-i)\triangle t}q((k-1)\triangle t)\triangle t]$$

позволяет подобрать согласованные значения параметров $\triangle x$ и $\triangle t$. Вычислив значения функции $u(t_0,x)$ при различных значениях параметра t_0 получим совокупность графиков функций приведённых на рисунке 6.

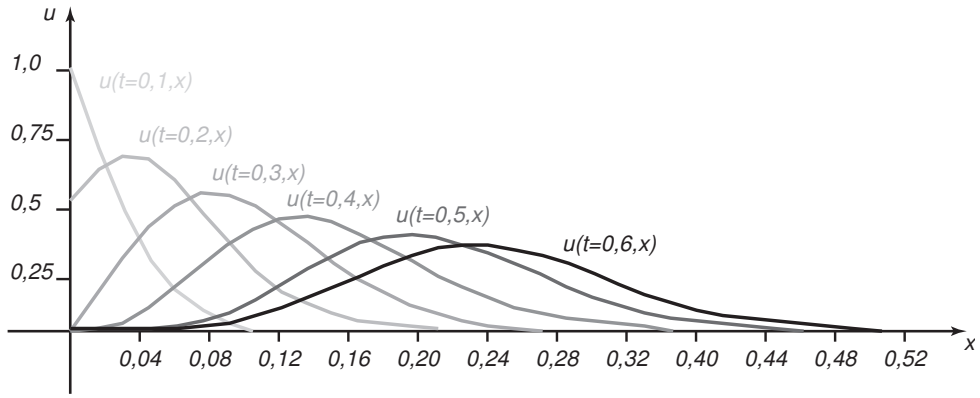

Рис. 6. Пример рассеяния импульса давления в жидкость проводящей магистрали, имеющей пористую структуру.

Из этого рисунка видно, что входной импульс преобразуется в рассматриваемой модели в одиночную волну, которая смещается вправо по оси x и рассеивается в мере продвижения. Наиболее чувствительными, к изменениям параметров a, ν, γ, характерными точками этих функций являются точки перегиба (если учитывать изменение расстояния между ними), второй по значимости характерной точкой является точка максимума. В состав системы управления целесообразно включить два датчика давления, разместив их в точках $x = 0,12$ и $x = 0,24$. Эти датчики должны получать системные тактовые импульсы, по которым осуществляется привязка к реальному времени системы управления. В промежуток времени, определённый двумя последовательными тактовыми импульсами, датчик должен произвести как минимум шесть измерений, чтобы наверняка выделить тактовый импульс, содержащий точку перегиба.Опрос результатов измерений и их обработка не включается в приоритетные процессы системы управления, поэтому формат данных передаваемых системе управления должен отражать: - число системных тактов разделяющих моменты обнаружения и передачи данных об особой точке измеряемой функции; - тип особой точки (первая точка перегиба, максимум функции, вторая точка перегиба, значение функции превысило порог, значение функции стало меньше порогового значения) - значение функции в особой точке. Одна из центральных задач проектируемой системы управления состоит в определении таких ситуаций, при наступлении которых значение параметра γ станет меньше порогового значения.

Литература

[1] Бабенко Ю.И. Тепломассообмен, методы расчета тепловых и диффузионных потоков.// Ю.И. Бабенко.— Л.: Химия, 1986, 144 с.

[2] Бабенко Ю.И. Методы дробного интегродифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена. // Ю.И. Бабенко.— СПБ.: НПО "Профессионал 2009, 584 с.

[3] Баев А. Д. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика .— Воронеж, 2012 .— № 1. - С. 81-9

[4] Баскаков А.Г. Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторной функций/ А.Г. Баскаков.— Мат. сб, 1984.—124 (166), N I(15).— с. 68–95.

[5] Бахвалов Н.С. Численные методы.–М.: Наука, 1973.–631 с.

[6] Васильев В.В. Дробное исчисление и аппраксимационные методы в моделировании динамических систем. Научное издание// В.В. Васильев, Л.А. Симак.— Киев, НАН Украина, 2008.— 256 с.

[7] Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. // Г.Н. Ватсон. – М.: ИЛ, 1949.

[8] Вишик М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области/ М.И.Вишик, В.В.Грушин//Математический сборник–1969.–Т.80(112), вып.4.–С.455-491.

[9] Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения //Дж. Голдстейн.—Киев: Высща школа, 1989. - 347 с.

[10] Горбачук В.И., Князюк А.И. Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений. // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, № 3 (267). С. 55—91.

[11] Горбачук В.И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.// В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук, – Киев, – "Наука Думка". 1984. 283 с.

[12] Голубев В.С. Уравнение движения жидкости в пористой среде с застойными зонами. ДАН СССР, Т.238, №6, 1978, С. 1318—1320.

[13] Глушко В.П. О вырождающихся линейных дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве/ В.П. Глушко, С.Г. Крейн.-ДАН СССР, т. 181, N 4, 1968, С. 784—787.

[14] Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.// Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн.— Физмат. лит., 1970. 534 с.

[15] Джалиль М.С. Абстрактные ортогональные многочлены и дифференциальные уравнения. Диссертация на соискание уч. ст. канд. физмат. наук.// М.С. Джалиль – Воронеж, ВГУ, 2004, 76 с.

[16] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. // А. Зигмунд. – М.: Мир. – Т.1, 1965. 616 с.

[17] Иосида К. Функциональный анализ: Учебник/ К. Иосида, пер. с анг. В.М. Волосова.– М.: Мир, 1967—624 с.

[18] Келлер А.В., Захарова Е.В.Задача оптимального измерения с учетом резонансов: алгоритм программы и вычислительный эксперимент.//Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математическое моделирование и программирование .— Челябинск, 2012 .— № 27 вып.13 - С. 58-68 .

[19] Князюк А.В. Граничные значения эволюционных уравнений в банаховом пространстве. Диссертация на соискание уч. ст. канд. физ-мат. наук. – Киев. 1985. 115 с.

[20] Костин В.А. О равномерно корректной разрешимости краевых задач для абстрактных уравнений с оператором Келдыша-Феллера. // В.А. Костин. – Дифференциальные уравнения. – Т.7, 31, №8. с.1419 — 1425.

[21] Костин В.А., Небольсина М.Н.О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка // Доклады Академии Наук, 2009, Т.428, №1, С. 20—22.

[22] Костин В.А. Об аналитических полугруппах и сильно непрерывных косинус–функциях/ В.А. Костин.— ДАН СССР, 1989, Т. 307, №4, с. 796–799.

[23] Костин В.А. C_0–операторный интеграл Лапласа / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин.— ДАН, 2011, Т. 441, №1,с. 10–13.

[24] Костин В.А. Операторный метод Маслова-Хевисайда и C_0–операторный интеграл Дюамеля /В.А.Костин, А.В.Костин, Д.В.Костин.— ДАН. - 2013. -Т.452, №4. - с.367-370

[25] Костин В.А. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения /В.А.Костин, А.В.Костин, Д.В.Костин// ДАН. — 2014. - Т.455 №2 с.142-146

[26] Костин Д.В. О третьей краевой задаче для уравнения эллиптического типа в банаховом пространстве на R^+. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения -XXIII". Воронеж. Изд. полиграф. центр ВГУ, 2012, с.97.

[27] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве/ С.Г. Крейн.– М.: Наука, 1967.—464 с.

[28] Функциональный анализ/ под редакцией С.Г Крейна.М.: Наука, 1979, 418 с.

[29] Красносельский М. А., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., Наука, 1966, 499 с.

[30] Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного/ М.А. Лаврентьев, Б.П. Шабат.–М.: Наука, 1973.—736 с.

[31] Лаврентьев М.М. Одномерные обратные задачи математической физики // М.М. Лаврентьев, К.Г. Резницкая, В.Г.Яхно. — Наука,Сибир.отд. Новосибирск, 1982, 88 с.

[32] Левитан Б.М. Почти-периодические функции/ Б.М. Левитан.—М.: Тех-лит, 1953. 396 с.

[33] Лыков А.В. Теория теплопроводности/ А.В.Лыков. М.: Высшая школа, 1967. – 593 с.

[34] Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. Перев. с англ.-М.:Мир, 1988.—448 с.

[35] Мартыненко Н.А. Конечные интегральные преобразования и их применение/ Н.А. Мартыненко, Л.М. Пустыльников.–М.: Наука, 1986. 301 с.

[36] Маслов В.П. Операторные методы/ В.П. Маслов.–М.: Наука, 1973. 543 с.

[37] Маслов В.П. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса/ В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов, М.:Наука, 1987. 352 с.

[38] Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений/ В.П. Маслов.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 312 с.

[39] Небольсина М.Н. Исследование корректной разрешимости некоторых математических моделей тепломассопереноса методом С.Г. Крейна. Диссертация на соискание уч. ст. канд. физ-мат. наук. – Воронеж, ВГУ, 2009,—102 с.

[40] Орлов В. П. Сильные априорные оценки решений неоднородной начально-краевой задачи одной модели вязкоупругой среды / В.П. Орлов // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика .— Воронеж, 2012 .— № 2. - С. 190-197.

[41] Полянин А.Д. Справочник по точным решениям уравнений тепломассопереноса, А.Д. Полянин, А.В. Вязьмин, А.И. Журов, Д.А. Казенин.— М.: Факториал, 1998. 368 с.

[42] Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и в радиолакации // А.А. Потапов.— М.: Логос, 2002, 664 с.

[43] Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., Наука, 1978, 591 с.

[44] Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения/ С.Г., А.А. Килбас, О.И. Маричев.– Минск: Наука и техника, 1987, 687 с.

[45] Свиридюк Г.А. Полугруппы операторов с ядрами //Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров – Вестник Челяб. ун-та. Серия3, Математика. Механика. Информатика, 2002, No1. С. 42–70.

[46] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Учебное пособие для вузов. Изд. 3-е исправленное.–М.:Наука. Гл.ред.физ.мат.лит, 1986.–288 с.

[47] Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа, т. 2/ Э.Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, пер с англ. под ред. Ф.В. Широкого, М.: Физ-мат. лит., 1963.—515 с.

[48] Учайкин В.В. Методы дробных производных// В.В. Учайкин.— Ульяновск, Изд. "Логос 2002.— 512 с.

[49] Фадеев Д. К., Лекции по алгебре, М., Наука, 1984, 416 с.

[50] Фадеев Д. К. О свойствах матрицы обратной Хессенберговой, Записки научных семинаров, ЛОМИТ, II, 1981.

[51] Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов //В.Е. Федоров, Алгебра и анализ . 2000. Т.12, вып.3. С.173–200.

[52] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы// Э. Хилле, Р.Филлипс.— М.: Издательство иностранной литературы, 1962 – 829с.

[53] Аль-Кхазраджи Сундус Х.М., Костин В.А. Об одной задаче движения сжимающей жидкости в пористой среде / Аль Казараджи Сундус Хатем Маджид, В.А. Костин // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения XXIV".— Воронеж, 2013 .— С. 13-14

[54] Аль-Кхазраджи Сундус Х.М. О способе построения фрактальной поверхности. Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней математической школы, 2013. - С. 9

[55] Аль-Кхазраджи Сундус Х.М. Об одной задаче фильтрации в пористой среде / М.Н. Небольсина, С.Х.М. Аль Кхазраджи // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика .— Воронеж, 2014 .— № 3. - С. 129-135

[56] Аль-Кхазраджи Сундус Х.М. О корректной разрешимости некоторых задач фильтрации в пористой среде / М.Н. Небольсина, С.Х.М. Аль Кхазраджи // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Математическое моделирование и программирование .— Челябинск, 2014 .— Т. 7, № 3. - С. 60-68 .

[57] Аль-Кхазраджи Сундус Х.М. О разностных методах решения одной задачи фильтрации. "Воронежская зимняя математическая школа

С.Г.Крейна - 2014". Материалы международной конференции. Воронеж. - С.25-26

[58] Аль-Кхазраджи Сундус Х.М. Об автоматическом регулировании течения вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде. Аль-Кхазраджи Сундус Х.М., Костин В.А., Фирсов В.Г.//«Актуальные направления научных исследований XXI века : теория и практика» : сб. науч. тр. по мат. межд. заочной науч.-практич. конф. «Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения» (проведена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-31-10229)), г. Воронеж, 18-19 ноября 2014 г., ФГБОУ ВПО «Воронежская государственная лесотехническая академия» (ВГЛТА). – Воронеж : УОП ФГБОУ ВПО «ВГЛТА», 2014. - № 5. – Ч. 2 (10-2). - С. 8-19.

Приложение

Программа предназначена для проведения численных экспериментов с целью выработки ориентировочных рекомендаций при выборе числа датчиков давления вдоль жидкость проводящей магистрали, а также при выборе алгоритмов работы этих датчиков. В магистрали происходит химическая реакция кристаллизации вещества, что вызывает изменение характера течения жидкости. В математической модели процесса течения вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде изменения, вызванные химической реакцией, имитируются изменениями значений параметров σ и γ. В процессе роста кристаллов сокращается доля проточных зон, что отражается в математической модели уменьшением значения параметра γ. А усложнение геометрии застойных зон и их связей с проточными зонами имитируется увеличением параметра σ .

Подавая на вход магистрали импульсные изменения давления, и измеряя изменение давления в характерных точках магистрали можно получить ориентировочные значения параметров σ и γ.

Один тип датчиков измеряет значение давления жидкости в магистрали по команде системы управления и возвращает результат измерения по её запросу. Таким образом этот тип датчиков сообщает системе управления результат измерения с некоторым запаздыванием, величина которого определяется загрузкой системы управления. Стоимость таких датчиков невысока и их применение оправдано в тех случаях, когда величина запаздывания в получении результата ничтожно мала по сравнению с временем изменения характеристик течения жидкости. Второй тип датчиков измеряет и сравнивает давление в двух близких точках, сравнивает их и фиксирует тот тактовый промежуток времени, в кото-

рый он зафиксировал максимальное значение. Формат данных, сообщаемый системе управления этим датчиком, имеет следующие информационные поля: <число тактовых импульсов системы управления, прошедших с момента обнаружения максимального значения>, <величина максимального значения давления>. Факт чтения измеренных значений сбрасывает измерительную систему датчика в исходное состояние.

Третий тип датчиков производит измерения в трех близких точках и на основе полученных данных определяет момент измерения либо максимального значения давления, либо момент измерения значения давления в точке перегиба (в момент достижения максимального или минимального значения производной от изменения давления). Этот датчик инициативно вырабатывает запрос к системе управления, инициирующий процедуру чтения измеренного значения. Формат данных, сообщаемый системе управления этим датчиком, имеет следующие информационные поля: <число тактовых импульсов, прошедших с момента обнаружения максимального значения>, <признак, определяющий характер поведения функции в точке измерения>, <величина измеренного значения давления>. Факт чтения измеренных значений сбрасывает измерительную систему датчика в исходное состояние.

Программа для персональной вычислительной машины, позволяющая построить приближённое решение граничной задачи для дифференциального уравнения, составляющего основу математической модели течения вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде, написана на языке Паскаль в среде Delphi. Вычислительный процесс реализуется тремя подпрограммами: первая выполняется в момент прорисовки окна на экране дисплея и осуществляет начальные установки переменных; вторая выполняется по щелчку левой клавишей "мыши"на кнопке "За-

дать граничные значения"и считывает значения величин параметров из окон редактирования, вычисляет граничные значения решения уравнения $u(t, 0)$; третья - выполняется по щелчку левой клавишей "мыши"на кнопке "Вычислить значения на слое"и вычисляет значения приближённого решения уравнения на очередном слое по t на дискретной сетке и выводит полученные данные в объекты вывода диалогового окна. Окно, обеспечивающее управление выполнением программы, спроектировано так, как показано на Рис. 7.

В этом окне:

Объект редактирования, поименованный меткой dt, предназначен для задания величины шага дискретной сетки, являющейся областью определения приближённого решения, по оси t. По умолчанию это значение равно 0,01. Объект редактирования, поименованный меткой dx, предназначен для задания величины шага дискретной сетки, являющейся областью определения приближённого решения, по оси x. По умолчанию это значение равно 0,01. Объект редактирования, поименованный меткой a, предназначен для задания значения параметра в уравнении, представляющем математическую модель течения вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде. По умолчанию это значение равно 0,5.

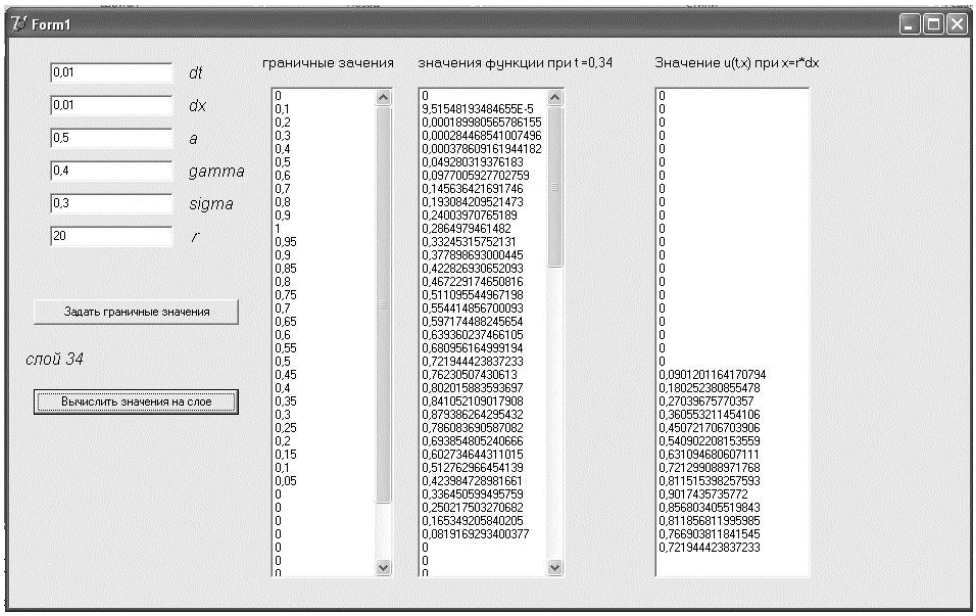

Рис. 7. Окно, обеспечивающее управление выполнением программы

Объект редактирования, поименованный меткой gamma, предназначен для задания значения параметра γ в уравнении, представляющем математическую модель течения вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде. По умолчанию это значение равно 0,4.

Объект редактирования, поименованный меткой sigma, предназначен для задания значения параметра σ в уравнении, представляющем математическую модель течения вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде. По умолчанию это значение равно 0,3.

Объект редактирования, поименованный меткой r, предназначен для задания значения аргумента x0 = r*dx при котором выводится список значений функции $u(t, x0)$. По умолчанию это значение равно 20. Кнопка "Задать граничные значения"предназначена для вызова подпрограммы ввода параметров задачи и вычисления граничных значений решения уравнения, моделирующего течение вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде. Метка "слой nn"информирует пользователя о том, что значе-

ния решения построены для слоя сетки с номером nn, то есть для значения t = nn*dt. Кнопка "Вычислить значения на слое"предназначена для вызова подпрограммы вычисления значений решения уравнения, моделирующего течение вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде, на следующем слое, относительно номера, указанного меткой "слой nn". Три списка для вывода вычисленных значений решения дифференциального уравнения: в левом записываются граничные условия u(t, 0); в следующем - значения искомой функции на очередном слое u(nn*dt, x); в третьем - значения функции при x = r*dt. Программа предназначена для выработки ориентировочных рекомендаций, которые в дальнейшем будут подвергнуты уточнению на основе натурных экспериментов. Поэтому при выводе вычисленных значений не использовался форматизированный вывод данных.

implementation

// Описание глобальных констант.

// Константа nn устанавливает количество слоёв и точек в каждом слое для представления приближённого решения параболического уравнения.

// В данном случае решение будет строиться в квадрате 100 точек по оси x и 100 точек по оси t .

Const

nn = 100;

// Константы строкового типа для хранения постоянных частей пояснительных надписей в диалоговом окне пользователя.

l8 = 'значения функции при t =';

l6 = 'слой ';

// Список глобальных констант и переменных.

var

// jv - переменная целого типа, содержащая номер слоя по оси на котором будет вычисляться приближенное решение.

// jn - переменная целого типа, содержащая номер слоя, содержащего вычисленные значения решения уравнения при последнем обращении к вычислительной подпрограмме.

// st переменная целого типа, содержащая номер столбца дискретной сетки значения функции которого выводятся в третьем списке для вывода значений.

jv, jn , st : integer;

// Массив действительных чисел для размещения приближённых значений решения параболического уравнения.

u : array [0..nn,0..nn] of real;

// Переменные действительного типа dt, dx для сохранения значений приращений для перехода к следующему узлу дискретной сетки по координатам t и x, соответственно.

dt, dx: real;

// Переменные действительного типа для хранения величин коэффициентов уравнения параболического типа.

a, sigma, gamma : real;

// Переменные действительного типа для хранения вспомогательных величин:

// $betta = sqrt(\frac{\gamma}{a\triangle t})$;

//$p = exp(\beta * dx)$;

//$pp = exp(-\beta * nn * dx)$;

// a переменная pn будет содержать степень переменной p начиная с нулевой // и до nn-1

betta, p, pn, pp : real;

$\{R*.dfm\}$

// Подпрограмма выполняет начальные установки параметров программы.

procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject); var i, k : integer;

begin

// Заполнение массива приближённых значений решения уравнения.

for i := 0 to nn do

for k := 0 to nn do

u[i,k] := 0;

// Определение указателей:

jv := 1; // на слой вычисления значений решения уравнения.

jn := 0; // на слой с наибольшем номером, для которого решение уже построено.

end;

// Процедура осуществляет ввод параметров для построения приближенного решения уравнения и вычисляет краевое условие при значении x = 0.

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject); var i : integer;

begin

// Определение параметров, определяющих дискретную сетку для вычисляемых значений функции

dt := StrToFloat(Edit1.Text);

dx := StrToFloat(Edit2.Text);

// Определение параметров параболического уравнения.

a := StrToFloat(Edit3.Text);

gamma := StrToFloat(Edit4.Text);

sigma := StrToFloat(Edit5.Text);

st := StrToInt(Edit6.Text);

// Вычисление значений импульса давления, используемого в качестве краевого условия.

for i := 1 to 10 do

u[i,0] := 0.1*i;

for i := 11 to 30 do

u[i,0] := 0.1*(10-(i-10)*0.5);

// Вывод значений краевого условия.

for i := 0 to 40 do

ListBox1.Items[i] := FloatToStr(u[i,0]);

end;

// Процедура реализует вычисление приближенных значений решения на очередном слое по рекуррентной формуле:

$$\{u((n+1)\triangle x) = (\frac{u(n\triangle x) + g(1 - e^{\beta n\triangle x}e^{-\beta m\triangle x})}{e^{-\beta n\triangle x} - e^{-\beta m\triangle x}e^{-\beta m\triangle x}e^{\beta n\triangle x}})*$$

$$*(e^{-\beta(n+1)\triangle x} - e^{-\beta m\triangle x}e^{-\beta m\triangle x}e^{\beta(n+1)\triangle x}) + g(e^{-\beta m\triangle x}e^{\beta(n+1)\triangle x} - 1)$$

в которой m число узловых точек по оси x

$$\beta^2 = \frac{\gamma}{a\triangle t},$$

$$f = (\frac{(1-\gamma)\sigma}{a} - \frac{\gamma}{a\triangle t})u(n\triangle x, (i-1)\triangle t) - (1-\gamma)\sigma^2*$$

$$*\sum_{k=1}^{i} e^{\sigma(k-i)\triangle t}u(n\triangle x, (k-1)\triangle t)\triangle t,$$

$$g = \frac{f}{\beta^2}.\}$$

procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);

var

```
i, k : integer;
sum, f, zn : real;
begin
// Вычисление значения параметра
betta := sqrt(gamma/(a*dt));
// Отображение номера слоя на котором строится решение.
Label6.Caption := IntToStr(jv);
// Вычисление значений по рекуррентной формуле.
p := exp(betta*dx);
pp:= exp(-betta*nn*dx);
pn := 1;
ListBox2.Items[0] := FloatToStr(u[jv,0]);
For i := 1 to nn-1 do
Begin
sum := 0;
for k := 1 to jv do
sum := sum + exp(sigma*(k-jv-1)*dt)*u[k-1,i-1]*dt;
sum := sum*(1-gamma)*sigma*sigma;
f := (((1-gamma)*sigma)/a-gamma/(a*dt))*u[jn,i-1]-sum;
f := f/(betta*betta);
zn := (u[i-1, jv]+f*pn*pp)/((1/pn)-pp*pp*pn);
zn := zn*((1/(pn*p))-pp*pp*pn*p);
zn := zn+f*(pp*pn*p-1);
// Вычислено очередное значение функции на слое
u[jv,i] := zn;
ListBox2.Items[i] := FloatToStr(u[jv,i]);
// Вычисление нового значения параметра рекуррентной формулы.
```

pn := pn*p;

End;

// Переключение указателей для вычисления значений функции на новом слое

jn := jv;

jv := jv+1;

// Занесение в список значение функции в выделенной точке по оси x

ListBox3.Items[jn] := FloatToStr(u[jn,st]);

// Изменение надписей в диалоговом окне.

Label8.Caption := l8 + FloatToStr(jn*dt);

Label6.Caption := l6 + IntToStr(jn);

end;

Алгоритм для проведения расчётов состоит из следующих шагов:

1. Задание коэффициентов модели.

2. Задание точки по оси x, в которой ведётся наблюдение за поведением решения.

3. Вычисление значений решения на очередном слое и в точке наблюдения

4. Оценка пользователем достаточности полученных данных при заданных данных.

5. Нужны дополнительные данные?

Да, переход к п.3

Нет, переход к п.6

Нужны эксперименты с новыми значениями параметров модели?

Да, переход к п.1

Нет, выход.

С использованием приведённой выше программы были проделаны численные эксперименты, результаты которых приведены на рис. 8.

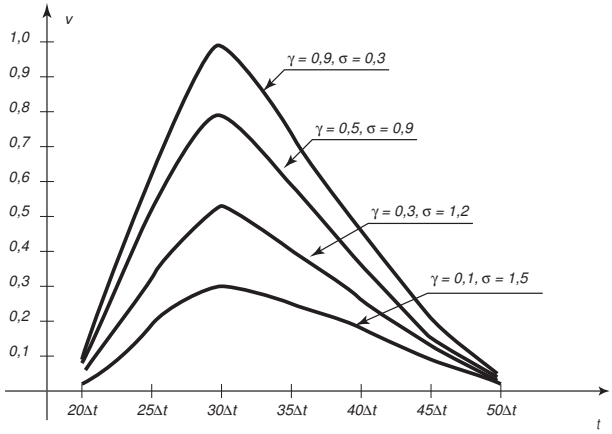

Рис. 8. Изменение начального импульса давления в точке $x_0 = 20dx$ от времени в зависимости от значений пар параметров γ, σ.

На основе полученных результатов, можно сделать вывод о том, что изменение давления в точке $x_0 = 20dx$ может дать достаточный объём информации для управления процессом кристаллизации в жидкость проводящей магистрали.

Фрагменты исходного текста программы, используемые для проектирования аппаратуры автоматического регулирования течения вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде.

1. Реализация явного метода.

а. Без учета параметра α.

```
Result := | for j ∈ 0..tn − 1
            | temp_{j,0} ← U_{j,0}
          | sum ← 0
          | for j ∈ 1..tn − 2
            | τ ← j·dt
            | sum ← sum + ∫_{τ−dt}^{τ} e^{γ·(s−τ)} ds
            | κ ← −2/dx^2 − (1 − ν)γ/a + (1 − ν)·γ^2·sum/a + ν/(a·dt)
            | for i ∈ 1..xm − 2
              | zn ← temp_{j,i−1} · κ
              | zn ← zn + (temp_{j−1,i−1} + temp_{j+1,i−1})/dx^2
              | zn ← (zn·a)·dt/ν
              | temp_{j,i} ← zn
              | temp
            | temp_{j,xm−1} ← 0
            | temp
          | temp
```

b. С учетом параметра α.

```
Result := | for j ∈ 0..tn − 1
            | temp_{j,0} ← U_{j,0}
          | sum ← 0
          | for j ∈ 1..tn − 2
            | τ ← j·dt
            | sum ← sum + ∫_{τ−dt}^{τ} e^{γ·(s−τ)}·(τ − s)^{α−1} ds
            | κ ← −2/dx^2 − (1 − ν)γ/a + (1 − ν)·γ^2·sum/(a·Γ(α)) + ν/(a·dt)
            | for i ∈ 1..xm − 2
              | zn ← temp_{j,i−1} · κ
              | zn ← zn + (temp_{j−1,i−1} + temp_{j+1,i−1})/dx^2
              | zn ← (zn·a)·dt/ν
              | temp_{j,i} ← zn
              | temp
            | temp_{j,xm−1} ← 0
            | temp
          | temp
```

2. Реализация неявного метода.

а. Без учета параметра α.

$$
\begin{aligned}
\text{Result} := \;& \text{for } i \in 0..tn-1 \\
& \quad temp_{i,0} \leftarrow U_{i,0} \\
& \quad temp_{i,xm-1} \leftarrow 0 \\
& \text{for } j \in 1..xm-2 \\
& \quad temp_{0,j} \leftarrow 0 \\
& k1 \leftarrow \frac{-1}{dx^2} \\
& k2 \leftarrow \frac{2}{dx^2} + \frac{\nu}{a \cdot dt} + \frac{(1-\nu)\gamma}{a} \\
& k3 \leftarrow \frac{\nu}{a \cdot dt}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \text{for } i \in 1..tn-1 \\
& \quad \tau \leftarrow i \cdot dt \\
& \quad k2 \leftarrow k2 - \frac{(1-\nu)\cdot\gamma^2}{a} \cdot \int_{\tau-dt}^{\tau} e^{\gamma\cdot(s-\tau)}\, ds \\
& \quad A_{0,0} \leftarrow 1 \\
& \quad B_0 \leftarrow temp_{i,0} \\
& \quad \text{for } l \in 1..xm-2 \\
& \quad\quad A_{l,l-1} \leftarrow k1 \\
& \quad\quad A_{l,l+1} \leftarrow k1 \\
& \quad\quad A_{l,l} \leftarrow k2 \\
& \quad\quad B_l \leftarrow k3 \cdot temp_{i-1,l} \\
& \quad A_{xm-1,xm-1} \leftarrow 1 \\
& \quad B_{xm-1} \leftarrow temp_{i,xm-1} \\
& \quad L_0 \leftarrow 0 \\
& \quad M_0 \leftarrow 0 \\
& \quad L_1 \leftarrow \frac{-A_{0,1}}{A_{0,0}} \\
& \quad M_1 \leftarrow \frac{B_0}{A_{0,0}} \\
& \quad \text{for } l \in 1..xm-2 \\
& \quad\quad L_{l+1} \leftarrow \frac{-A_{l,l+1}}{A_{l,l} + A_{l,l-1} \cdot L_l} \\
& \quad\quad M_{l+1} \leftarrow \frac{-A_{l,l-1} \cdot M_l + B_l}{A_{l,l} + A_{l,l-1} \cdot L_l} \\
& \quad pr_{xm-1} \leftarrow \frac{-A_{xm-1,xm-2} \cdot M_{xm-1} + B_{xm-1}}{A_{xm-1,xm-1} + A_{xm-1,xm-2} \cdot L_{xm-1}} \\
& \quad \text{for } l \in xm-2..0 \\
& \quad\quad pr_l \leftarrow L_{l+1} \cdot pr_{l+1} + M_{l+1} \\
& \quad \text{for } l \in 1..xm-2 \\
& \quad\quad temp_{i,l} \leftarrow pr_l \\
& \quad temp \\
& temp
\end{aligned}
$$

b. С учетом параметра α.

$$
\begin{aligned}
\text{Result} := \;& \text{for } i \in 0..tn-1 \\
& \quad temp_{i,0} \leftarrow U_{i,0} \\
& \quad temp_{i,xm-1} \leftarrow 0 \\
& \text{for } j \in 1..xm-2 \\
& \quad temp_{0,j} \leftarrow 0 \\
& k1 \leftarrow \frac{-1}{dx^2} \\
& k2 \leftarrow \frac{2}{dx^2} + \frac{\nu}{a \cdot dt} + \frac{(1-\nu)\gamma}{a} \\
& k3 \leftarrow \frac{\nu}{a \cdot dt}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \text{for } i \in 1..tn-1 \\
& \quad \tau \leftarrow i \cdot dt \\
& \quad k2 \leftarrow k2 - \frac{(1-\nu)\cdot\gamma^2}{a\cdot\Gamma(\alpha)} \cdot \int_{\tau-dt}^{\tau} e^{\gamma\cdot(s-\tau)} \cdot (\tau - s)^{\alpha-1}\, ds \\
& \quad A_{0,0} \leftarrow 1 \\
& \quad B_0 \leftarrow temp_{i,0} \\
& \quad \text{for } l \in 1..xm-2 \\
& \quad\quad A_{l,l-1} \leftarrow k1 \\
& \quad\quad A_{l,l+1} \leftarrow k1 \\
& \quad\quad A_{l,l} \leftarrow k2 \\
& \quad\quad B_l \leftarrow k3 \cdot temp_{i-1,l} \\
& \quad A_{xm-1,xm-1} \leftarrow 1 \\
& \quad B_{xm-1} \leftarrow temp_{i,xm-1} \\
& \quad L_0 \leftarrow 0 \\
& \quad M_0 \leftarrow 0 \\
& \quad L_1 \leftarrow \frac{-A_{0,1}}{A_{0,0}} \\
& \quad M_1 \leftarrow \frac{B_0}{A_{0,0}} \\
& \quad \text{for } l \in 1..xm-2 \\
& \quad\quad L_{l+1} \leftarrow \frac{-A_{l,l+1}}{A_{l,l} + A_{l,l-1} \cdot L_l} \\
& \quad\quad M_{l+1} \leftarrow \frac{-A_{l,l-1} \cdot M_l + B_l}{A_{l,l} + A_{l,l-1} \cdot L_l} \\
& \quad pr_{xm-1} \leftarrow \frac{-A_{xm-1,xm-2} \cdot M_{xm-1} + B_{xm-1}}{A_{xm-1,xm-1} + A_{xm-1,xm-2} \cdot L_{xm-1}} \\
& \quad \text{for } l \in xm-2..0 \\
& \quad\quad pr_l \leftarrow L_{l+1} \cdot pr_{l+1} + M_{l+1} \\
& \quad \text{for } l \in 1..xm-2 \\
& \quad\quad temp_{i,l} \leftarrow pr_l \\
& \quad temp \\
& temp
\end{aligned}
$$

3. Реализация метода краевых задач.

a. Без учета параметра α.

$$\beta := \sqrt{\frac{\nu}{a \cdot dt}}$$

$$p := e^{\beta \cdot dx}$$

$$pp := e^{-\beta \cdot nn \cdot dx}$$

```
Result := | for j ∈ 0..nn − 1
          |   temp[j,0] ← U[j,0]
          | for j ∈ 1..nn − 1
          |   | for i ∈ 1..nn − 1
          |   |   | sum ← 0
          |   |   | for k ∈ 1..j
          |   |   |   sum ← sum + e^(γ·(k−j−1)dt) temp[k−1,i−1] dt
          |   |   | sum ← sum·(1 − ν)·γ^2/a
          |   |   | f ← [(1 − ν)γ/a − ν/(a·dt)] temp[j−1,i−1] − sum
          |   |   | f ← f/β^2
          |   |   | zn ← temp[j,i−1]·(1/(pn·p) − pp^2·pn·p) / (1/pn − pp^2·pn)
          |   |   | zn ← zn + f·(1 − pp·pn)·(1/(pn·p) − pp^2·pn·p) / (1/pn − pp^2·pn)
          |   |   | zn ← zn − f·(1 − pp·pn·p)
          |   |   | pn ← pn·p
          |   |   | temp[j,i] ← zn
          |   |   | temp
          |   | pn ← 1
          | temp
```

b. С учетом параметра α

$$\beta := \sqrt{\frac{\nu}{a \cdot dt}}$$

$$p := e^{\beta \cdot dx}$$

$$pp := e^{-\beta \cdot nn \cdot dx}$$

```
Result := | for j ∈ 0..nn − 1
            | temp[j,0] ← U[j,0]
          | for j ∈ 1..nn − 1
            | for i ∈ 1..nn − 1
              | sum ← 0
              | for k ∈ 1..j
              |   sum ← sum + e^(γ·(k−j−1)dt) temp[k−1,i−1] dt·[(j + 1 − k)·dt]^(α−1)
              | sum ← [sum·(1 − ν)·γ^2] / (a·Γ(α))
              | f ← [(1 − ν)γ / a − ν / (a·dt)] temp[j−1,i−1] − sum
              | f ← f / β^2
              | zn ← temp[j,i−1]·(1/(pn·p) − pp^2·pn·p) / (1/pn − pp^2·pn)
              | zn ← zn + f·(1 − pp·pn)·(1/(pn·p) − pp^2·pn·p) / (1/pn − pp^2·pn)
              | zn ← zn − f·(1 − pp·pn·p)
              | pn ← pn·p
              | temp[j,i] ← zn
              | temp
            | pn ← 1
          | temp
```

СВИДЕТЕЛЬСТВО о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015661487.

Программа анализа параметров вязкой сжимаемой жидкости, протекающей в пористой среде.

Правообладатели: Чехов Сергей Асланович, Аль Кхазараджи Сундус Хатем Маджид.

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 29 октября 2015.

Зарегистрировано Федеральной службой по интеллектуальной собственности.